



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava



SDÍLENÍ TEPLA A PROUDĚNÍ

učební text

Adéla Macháčková, Radim Kocich

Ostrava 2012

Recenze: Prof. Ing. Pavel Kolat, DrSc.,
Ing. Kateřina Kostolányová, Ph.D.

Název: Sdílení tepla a proudění
Autor: Doc. Ing. Adéla Macháčková, Ph.D., Doc. Ing. Radim Kocich, Ph.D.
Vydání: první, 2012
Počet stran: 187
Náklad: 20

Studijní materiály pro studijní obory: Technologie výroby kovů, Slévárenské technologie, Technologie tváření a úpravy materiálu, Tepelná technika a životní prostředí, Technické materiály, Neželezné kovy a speciální slitiny, Diagnostika materiálů, Materiály a technologie pro automobilový průmysl, Recyklace materiálů, Chemie a technologie paliv, Chemické a fyzikální metody zkoušení materiálu, Chemie a technologie ochrany prostředí, Automatizace a počítačová technika v průmyslu.

Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:

Operační program Vzděláváním pro konkurenceschopnost

Název: Personalizace výuky prostřednictvím e-learningu

Číslo: CZ.1.07/2.2.00/07.0339

Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava

Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

© Adéla Macháčková, Radim Kocich

© VŠB – Technická univerzita Ostrava

ISBN 978-80-248-2576-2

OBSAH

1. ÚVOD	7
2. SDÍLENÍ TEPLA VEDENÍM	8
2.1. Základní zákony	19
2.2. Příklady vedení tepla	49
3. KONVEKCE A HYDRODYNAMIKA	38
3.1. Fyzikální vlastnosti tekutin	38
3.2. Základní rovnice hydromechaniky	49
3.3. Statika tekutin	62
3.4. Dynamika tekutin	68
3.5. Hydraulické ztráty	74
3.6. Výtok tekutin otvory	83
3.7. KONVEKCE	89
4. SDÍLENÍ TEPLA ZÁŘENÍM	105
4.1. Podstata záření a teorie	106
4.2. Základní pojmy	109
4.3. Radiační vlastnosti	110
4.4. Základní zákony	114
4.5. Záření mezi povrchy šedých těles	117
4.5. Sálání plynů	124
5. VYUŽITÍ MODERNÍCH SIMULAČNÍCH SOFTWARŮ VE SDÍLENÍ TEPLA A PROUDĚNÍ	131
5.1. Tepelné úlohy	132
5.2. Metoda konečných prvků (MKP, FEM)	136
5.3. Postup tvorby simulace - obecně	137
5.4. Hlavní důvody pro využívání počítačové simulace	141
5.5. Vybrané příklady tepelných úloh a jejich řešení pomocí simulačních programů.	142

POKYNY KE STUDIU

Sdílení tepla a proudění

Pro předmět **Sdílení tepla a proudění** ve 4. semestru oborů Technologie výroby kovů, Slévárenské technologie, Technologie tváření a úpravy materiálu, Tepelná technika a životní prostředí, Technické materiály, Neželezné kovy a speciální slitiny, Diagnostika materiálů, Materiály a technologie pro automobilový průmysl, Recyklace materiálů, Chemie a technologie paliv, Chemické a fyzikální metody zkoušení materiálu, Chemie a technologie ochrany prostředí, Automatizace a počítačová technika v průmyslu, jste obdrželi studijní balík obsahující

- integrované skriptum pro distanční studium obsahující i pokyny ke studiu,
- CD-ROM s doplňkovými animacemi a videi vybraných částí kapitol,
- kontakt na studijní oddělení a autory skript.

Prerekvizity

Tento předmět nemá prerekvizity.

Cílem předmětu,

je seznámení se základními pojmy z oblasti tepelné techniky a proudění tekutin a nahlédnutí také do oblasti numerického modelování v tepelné technice jako aplikace na probrané učivo. Po prostudování modulu by měl student být schopen své poznatky využít v praxi i v příbuzných (interdisciplinárních) oborech.

Pro koho je předmět určen

Modul je zařazen do bakalářského studia výše vyjmenovaných oborů náležících k těmto studijním programům: Metalurgické inženýrství, Materiálové inženýrství, Procesní inženýrství a Ekonomika a řízení průmyslových systémů, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru.

Skriptum se dělí na kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

Při studiu každé kapitoly doporučujeme následující postup:



Čas ke studiu: xx hodin

Na úvod kapitoly je uveden **čas** potřebný k prostudování látky. Čas je orientační a může vám sloužit jako hrubé vodítko pro rozvržení studia celého předmětu či kapitoly. Někomu se čas může zdát příliš dlouhý, někomu naopak. Jsou studenti, kteří se s touto problematikou ještě nikdy nesetkali a naopak takoví, kteří již v tomto oboru mají bohaté zkušenosti.



Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat ...
- definovat ...
- vyřešit ...

Okamžitě potom jsou uvedeny cíle, kterých máte dosáhnout po prostudování této kapitoly – konkrétní dovednosti, znalosti.



VÝKLAD

Následuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů, jejich vysvětlení, vše doprovázeno obrázky, tabulkami, příklady, odkazy na animace.



Shrnutí pojmů kapitoly

Na závěr kapitoly jsou zopakovány hlavní pojmy, které si v ní máte osvojit. Pokud některému z nich ještě nerozumíte, vraťte se k nim ještě jednou.



Otázky kapitoly

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek. Na všechny otázky naleznete odpovědi v textu. Otázky nemají vypracovány odpovědi.



Pojmy k zapamatování

Některé kapitoly obsahují rovněž pojmy k zapamatování, tedy vypíchnutí důležitých pojmů.



Řešený příklad

Pro pochopení učiva jsou připravené příklady v textu, které svá řešení mají na konci učebnice. Příkladů je celkem 14 a lze je vypočítat s pomocí kalkulačky a přiložených tabulek.



Další zdroje

Zde je uveden seznam všech použitých zdrojů. Pro Vaše další rozšíření poznatků a informací popisované problematiky. Použité informační zdroje jsou uvedeny na konci těchto skript.



CD-ROM

V této části jsou informace o 16 animacích a 3 videích, které jsou součástí těchto skript. Následuje popis práce s animacemi i popis samotných animací a videí.

Úspěšné a příjemné studium s touto učebnicí Vám přeji autoři výukového materiálu. Budeme rádi, když nám sdělíte Vaše náměty a podněty, které mohou tuto učebnici dále rozvíjet.

Adéla Macháčková a Radim Kocich

Kontakty:

Studijní oddělení: Ing. Monika Barčová, monika.barcova@vsb.cz

Autoři: adela.machackova@vsb.cz; radim.kocich@vsb.cz

1. ÚVOD

Skriptum Sdílení tepla a proudění je rozděleno do 4 hlavních oddílů, které na sebe navazují. První oddíl je věnován Sdílení tepla vedením v tuhých látkách, druhý oddíl je věnován konvekci a hydrodynamice, třetí oddíl Vás v krátkosti seznámí se sdílením tepla radiací neboli zářením a v posledním oddílu, si ukážeme konkrétní aplikace nabytých poznatků prostřednictvím numerického simulování tepelných dějů spolu s jednoduchými základy počítačového modelování a vybranými typy simulačních softwarů.

Sdílení tepla vedením (kondukcí), konvekcí (prouděním) a sáláním (radiací, zářením) nás provází naší každodenní činností, aniž si to uvědomujeme. Sdílení tepla ve všech třech jeho formách je již neodmyslitelnou součástí v různých oblastech činnosti člověka. Není rozdílu pro sdílení tepla, zda-li konvekce – kondukce a radiace probíhá v materiálu, nebo v konkrétní technologii. Pořád platí stejné zákony a pravidla, která se v následujícím textu naučíte. A hlavní věcí je, že je můžete dále uplatňovat ve studiu příbuzných oborů. Je to proto, protože je sdílení tepla založeno na základních termomechanických základech, na základech fyziky, chemie a v neposlední řadě matematiky. Není snad technický obor činnosti, ve kterém bychom sdílení tepla mohli vynechat...

2. SDÍLENÍ TEPLA VEDENÍM

Sdílením tepla se nazývá přenos energie z oblasti o vyšší teplotě do oblasti s teplotou nižší. To je dáno platností druhého zákona termodynamiky. Sdílení tepla vedením je jedním ze tří druhů sdílení tepla, kterým se v této učebnici budeme zabývat. Vedení tepla se uskutečňuje v tuhých látkách obecně, nebo v tekutinách, které jsou, nebo nejsou v pohybu.



Čas ke studiu: cca 6 hodin



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat teplotní pole, hustotu tepelného toku, tepelný tok a teplo, gradient teploty,
- definovat součinitel tepelné vodivosti, jeho hodnoty pro jednotlivé materiály,
- definovat součinitel přestupu tepla a prostupu tepla a jaký je mezi nimi rozdíl,
- popsat stacionární a nestacionární tepelný děj,
- odvodit základní zákony vedení tepla – I. a II. Fourierův zákon a budete vědět, jaký je mezi nimi rozdíl,
- vyřešit základní případy ze stacionárního vedení tepla rovinnou a válcovou stěnou s dvěma různými podmínkami – se znalostí teploty povrchu materiálu a se znalostí okolního prostředí,
- vypočítat jednoduché případy vedení tepla - kolik tepla projde stěnou, jaká je teplota na rozhraní dvou stěn, jak tlustá musí být tepelná izolace, nebo z jakého materiálu má být izolace.



Výklad

2.1. Základní zákony

Teplotní pole. Existující teplotní pole a především existující rozdíl teplot je základním předpokladem pro uskutečňování sdílení tepla vedením. Matematicky toto lze napsat

$$t = f(x, y, z, \tau) \quad (^\circ\text{C}),$$

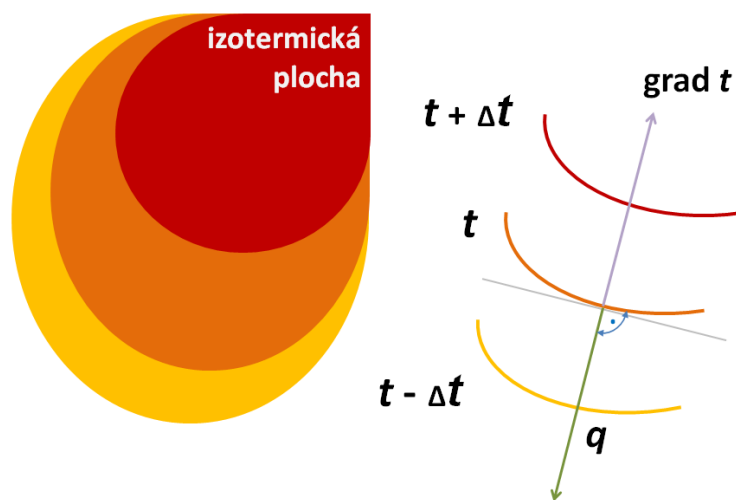
což znamená, že teplotní pole může být funkcí tří souřadnic (x, y, z), nebo dvou souřadnic (x, y), nebo funkcí jedné souřadnice (x). Děj může záviset na čase, pak hovoříme o *nestacionárním* vedení tepla, nebo děj může být nezávislý na čase, tedy *stacionární* vedení tepla. Teplotní pole si můžeme představit jako izotermické plochy – místa, ve kterých je stejná teplota, jak je vidět na obr. VED01.

Teplota se v materiálu mění ve všech směrech. Nárůst teploty je dán gradientem teploty, což je vektor, kolmý k izotermě a směřující na stranu nárůstu teploty,

$$\text{grad } t = \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} = \nabla t \text{ (K.m}^{-1}\text{)}, \text{ kde } \nabla \text{ je Hamiltonův operátor (m}^{-1}\text{)}.$$

Množství tepla přenesené přes izotermický povrch za čas je **tepelný tok** P . Tepelný tok vztahovaný na jednotku izotermické plochy (na 1 m^2) je nazýván **hustota tepelného toku** q (W.m^{-2}). Vzájemný vztah je

$$P = q \cdot S \quad (\text{W}).$$



Obr. VED01. Teplotní pole a izotermy.

Množství **tepla** Q , procházející izotermickou plochou je dáno jednoduchým součinem tepelného toku P a času τ , tedy

$$Q = P \cdot \tau = q \cdot S \cdot \tau \quad (\text{J}).$$

První Fourierův zákon. Se znalostí teplotního pole souvisí první Fourierův zákon, který říká, že hustota tepelného toku je úměrná zápornému gradientu teploty

$$q = -\lambda \cdot \text{grad } t = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial z} \right) \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}).$$

Tento zákon je rovněž graficky znázorněn na obr. **VED01**, jsou zde vektory q a $\text{grad } t$, které leží na jedné přímce, ale v opačném směru, což je dáno tím, že teplo se předává z oblasti teplejší do oblasti chladnější – proto znaménko mínus v uvedené rovnici. Rovněž zde není uvažováno s časovou složkou, tudíž první Fourierův zákon platí pro stacionární vedení tepla.

Novou veličinou je zde λ , což je **součinitel tepelné vodivosti** ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Součinitel tepelné vodivosti je fyzikálně tepelný parametr látky (stejně jako např. hustota, apod.). Závisí na teplotě, tlaku a chemickém složení dané látky. *Definicí* můžeme říci, že součinitel tepelné vodivosti je množství tepla, které projde za jednotku času (1 s) jednotkovou plochou izotermického povrchu (1 m^2), přičemž v tělese je jednotkový teplotní gradient (1 K), tedy

$$\lambda = - \frac{Q}{\text{grad } t \cdot S \cdot \tau} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}).$$

Součinitel se určuje experimentálně pro každou látku různými metodami – například laserová metoda, metoda horké desky, metoda odporová apod. V každé experimentální metodě, kterou pro určení součinitele tepelné vodivosti použijeme, je nutné znát hustotu tepelného toku, resp. tepelný tok (q , resp. P), který prochází danou látkou a rozdíl teplot měřeného materiálu na dané tloušťce materiálu. Dnes se laboratorně určuje tento součinitel sporadicky, pro určení součinitele se využívá moderních experimentálních měřicích přístrojů nadnárodních společností, které s dostatečnou přesností určí hodnotu této veličiny pro jakýkoliv materiál. Určení součinitele tepelné vodivosti je stěžejní pro matematické výpočty ohřevů a ochlazování materiálu, přestupů tepla a rovněž je důležitý jako vstupní veličina pro numerické simulace fyzikálně technických, tzn. také tepelných dějů.

Hodnoty součinitele tepelné vodivosti nalezneme v tabulkách. Jelikož je součinitel závislý na teplotě, budou to vždy hodnoty v závislosti na teplotě. Pro různé látky je součinitel různý a jeho hodnoty jsou v rozmezí od setin po stovky $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. V následující tabulce **TABV01** jsou uvedeny rozmezí hodnot součinitele tepelné vodivosti a některé konkrétní hodnoty této

veličiny pro různé materiály. Povšimněte si, že je vždy uvedena kromě hodnoty součinitele tepelné vodivosti také hodnota teploty.

Tabulka **TABV01**. Hodnoty součinitele tepelné vodivosti.

látka	hodnota λ $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$	poznámka
Plynné látky (0°C)		Se zvyšující se teplotou hodnota součinitele roste. To je dáno platností kinetické teorie plynů, kde platí, že střední rychlost molekul je funkcí teploty, proto se zvyšující se teplotou se součinitel zvyšuje. Součinitel na tlaku nezávisí (platné pro tlaky v rozmezí 10^2 až 10^6 Pa).
Vodík a helium (0°C)	0,14 a 0,17	Díky malé molární (molové) hmotnosti mají velkou střední rychlost molekul a proto jejich součinitel bude větší, než u jiných plynů.
Oxid uhličitý (0 - 1400°C) Vodík (0 - 1400°C) Metan (0 - 900 °C) Koksárenský plyn (0-1000 °C)	0,015 až 0,12 0,2 až 0,8 0,03 až 0,22 0,08 až 0,36	Příklady známých plynů.
Kapalné látky	0,08 až 0,70	Součinitel s rostoucí teplotou většinou klesá. Výjimkou je glycerin, kde součinitel s teplotou roste. Uvažuje se, že součinitel není funkcí tlaku, i když se zvyšující se teplotou nepatrně klesá.
Topný olej (0 až 200 °C) Benzin (0 až 200 °C)	0,12 až 0,102 0,121 až 0,09	Příklady známých kapalin.
Voda (127 °C)	0,69	Součinitel do teploty 127 °C roste, dosáhne maxima a pak klesá.
Tuhé látky	10 až 400	Tuhými tělesy mohou být kovy, polovodiče a nekovy. Kovy jsou výbornými vodiči tepla, obecně čisté kovy mají větší součinitel než kovy s příměsemi. U kovů vedou teplo volné elektrony.
Měď (0-1000 °C) Hliník (0-600°C) Mosaz (0-600°C) Cín (0 až 200°C) Zinek (0-400°C)	400 až 300 210 až 270 100 až 180 65 až 55 110 až 90	Příklady známých kovů.

Železo (0 až 800°C) Ocel křemíková (0 až 800°C) Legovaná ocel (0 až 800°C) Šedá litina (0 až 500°C)	53 až 30 32 až 24 16 až 24 50 až 36	Ocel, jako sloučenina Fe-C má rozdílné hodnoty součinitele. Pro každou značku oceli je třeba nový součinitel. S příměsí legujících prvků klesá hodnota součinitele.
Polovodiče Křemík (0°C) Germanium (0°C) Selen (20°C)	84 63 0,3-0,7	Polovodiče mají nižší počet volných elektronů, proto jsou horšími vodiči tepla než kovy, proto i součinitel tepelné vodivosti bude nižší, než u kovů. S rostoucí teplotou a s počtem cizích atomů se součinitel zvyšuje.
Nekovy Sklo (0-100°C) PVC (20°C) Led (0°C) Mramor (0°C)	0,74 až 0,88 0,16 až 0,21 0,90 1,30 ž 3,0	Nekovy nemají volné elektrony, proto vedou teplo pouze kmitavým pohybem atomů, tedy teplo nekovy vedou velmi špatně.
Pórovité tuhé látky Dřevo (0-15°C) Omítka (0°C) Sádra (20°C) Beton suchý (20°C) Cihla (20°C)	0,20 až 0,21 0,70 0,43 0,84 0,06	Tělesa s pórovitou strukturou (cihla, beton, dřevo, apod.) mají kromě tuhé části ještě část, která je vyplněná plynem, nebo kapalinou. Pro tato tělesa se určuje efektivní součinitel tepelné vodivosti $\lambda_{ef}^{*})$.
Žárovzdorné a izolační látky Šamot (0-1500°C) Dinas (0-1500°C) Minerální vlna (0-600°C) Skelná vata (0-400°C)	1,15 až 2,1 1,09 až 0,15 0,06 až 0,165 0,04 až 0,18	Jsou to látky, které velmi špatně vedou teplo, a proto se jich používá všude tam, kde nesmí docházet k únikům tepla.

*) λ_{ef} je závislý na obsahu vlhkosti, kterou jsou zaplněny póry tuhého materiálu. Vlhkost zvyšuje hodnotu λ_{ef} . V pórovitém materiálu, při zvyšování teploty, dochází pak k výměně tepla nejen vedením, ale také sáláním a konvekcí.

Druhý Fourierův zákon. Druhým Fourierovým zákonem nazýváme **Fourierovu rovnici vedení tepla**, která bude řešením vztahu $t = f(x, y, z, \tau)$. To znamená, že budeme uvažovat, jak se teplo šíří tělesem v určitém čase (nestacionární vedení tepla). Určíme si tedy rovnici, která bude postihovat fyzikální děj vedení tepla v látkách v průběhu času.

Pro určení Fourierovy rovnice vedení tepla budeme vycházet z těchto předpokladů, které jsou zároveň zjednodušení:

- tuhé těleso, které vede teplo, je homogenní a izotropní.
- Fyzikální vlastnosti tělesa jsou konstantní. Např. hustota, měrná tepelná kapacita, apod.
- Vnitřní objemové tepelné zdroje jsou rozmístěny rovnoměrně.
- Děj vedení tepla probíhá za konstantního tlaku (izobarický děj).

Pro odvození rovnice uvažujeme izobarický děj, kdy změna entalpie tělesa dI je rovna součtu tepla, které je za čas $d\tau$ do objemu přivedeno v důsledku tepelné vodivosti dQ_λ a teplo, které za stejný čas uvolní vnitřní objemové zdroje dQ_v , tedy

$$dI = dQ_\lambda + dQ_v \quad (\text{J}).$$

Obě tepla jsou vidět na obr. **VED02**. V tuhém tělese si vytkneme elementární objem o stranách x, y, z , tedy dV . Množství tepla, které se za čas $d\tau$ přivede jednotlivými stranami do elementárního objemu je dQ_x, dQ_y, dQ_z . Množství tepla, které se odvede z elementárního objemu $dQ_{x+dx}, dQ_{y+dy}, dQ_{z+dz}$. Stěna elementárního objemu kolmá na osu x můžeme považovat za izotermickou plochu, je to plocha $dy \cdot dz$. Množství tepla, procházející izotermickou plochou je dáno rovnicí

$$dQ = q \cdot dS \cdot d\tau \quad (\text{J})$$

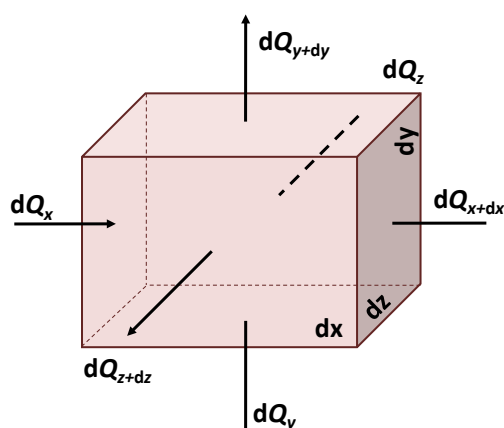
$$dQ_x = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$$

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau$$

kde q_x a q_{x+dx} jsou tepelné toky na příslušné stěně.

Množství tepla předané elementárnímu objemu ve směru osy x – $dQ_{\lambda,x}$ vychází ze spojitosti funkce q_{x+dx} , kterou lze vyjádřit Taylorovým rozvojem

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2!} + \dots$$



Obr. VED02. K odvození Fourierovy rovnice vedení tepla.

zanedbáme-li členy druhého řádu rozvoje a další řády, pak množství tepla $dQ_{\lambda,x}$ je následující

$$dQ_{\lambda,x} = dQ_x - dQ_{x+dx} = q_x - q_x - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau \quad (\text{analogicky pro další směry } -y, z).$$

Celkový přírůstek tepla do elementárního objemu v důsledku tepelné vodivosti dQ_λ

$$dQ_\lambda = dQ_{\lambda,x} + dQ_{\lambda,y} + dQ_{\lambda,z} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) \cdot dV \cdot d\tau \quad (\text{J}).$$

Teplo uvolněné vnitřními objemovými zdroji dQ_v za čas je dáno

$$dQ_v = q_v \cdot dV \cdot d\tau \quad (\text{J}).$$

Přírůstek entalpie dI

$$dI = m \cdot c_p \cdot dt = \rho \cdot dV \cdot c_p \cdot dt = \rho \cdot dV \cdot c_p \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} \cdot d\tau \quad (\text{J}).$$

Dosadíme-li do původní rovnice $dI = dQ_\lambda + dQ_v$ za výrazy dI , dQ_v a dQ_λ získáme

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v$$

$$\rho \cdot \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\operatorname{div} \mathbf{q} + q_v$$

Tato rovnice je **obecná diferenciální rovnice energie**. Využijeme ji pak dále při odvození Fourierovy –Kirchhoffovy rovnice. Dosadíme-li do poslední rovnice za jednotlivé složky hustoty tepelného toku q_x, q_y, q_z první Fourierův zákon

$$q_x = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial x}; \quad q_y = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial y}; \quad q_z = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial z}, \text{ pak rovnici můžeme napsat ve tvaru}$$

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v,$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho} \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{c_p \cdot \rho} \quad (\text{K} \cdot \text{s}^{-1}),$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p \cdot \rho} \quad (\text{K} \cdot \text{s}^{-1}),$$

kde ∇^2 je Laplaceův operátor. Poslední výraz je nejčastěji používaný tvar **Fourierovy** (parciální diferenciální) **rovnice vedení tepla**. Novou veličinou je zde a – **součinitel teplotní vodivosti** $a = \frac{\lambda}{c_p \cdot \rho}$, jednotkou je $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, jenž je zároveň konstantou úměrnosti – rychlost

změny teploty tělesa je přímo úměrná součiniteli teplotní vodivosti. Součinitel teplotní vodivosti je termofyzikálním parametrem látky a charakterizuje rychlost změny teplotního pole – např. jak rychle se změní teplota na povrchu tělesa. Čím je hodnota a větší, tím rychleji se změna teploty na povrchu projeví uvnitř tělesa. Kovové látky mají větší součinitel teplotní vodivosti než nekovy.

Fourierova rovnice vedení tepla je jednou ze tří základních rovnic pro přenosové jevy. Přenosovými jevy nazýváme přenos energie, přenos hmoty a přenos hybnosti. Všechny tři rovnice jsou si „podobné“ – porovnejte –

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t \quad \text{Fourierův zákon (teplo) –}$$

přenos energie, a – součinitel teplotní vodivosti ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$),

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = D \cdot \nabla^2 c \quad \text{Fickův zákon (difúze) –}$$

přenos hmoty, D – difuzivita ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$),

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \nu \cdot \nabla^2 v \quad \text{Newtonův zákon (vnitřní tření) –}$$

přenos hybnosti, ν – kinematická viskozita ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$).

Fourierovu rovnici vedení tepla můžeme rovněž napsat v těchto (zjednodušených) tvarech:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p \cdot \rho} \quad (\text{K} \cdot \text{s}^{-1}) \quad \text{základní tvar,}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \cdot \nabla^2 t \quad (\text{K} \cdot \text{s}^{-1}) \quad \text{sdílení tepla vedením je bez vnitřních objemových zdrojů}$$

$$a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad (\text{K} \cdot \text{m}^{-2}) \quad \text{Poissonova rovnice pro stacionární vedení tepla s vnitřními objemovými zdroji,}$$

$$\nabla^2 t = 0 \quad (\text{K} \cdot \text{m}^{-2}) \quad \text{Laplaceova rovnice pro stacionární vedení tepla bez vnitřních objemových zdrojů.}$$

Podmínky jednoznačnosti. Podmínky jednoznačnosti se používají k definování úloh vedení tepla a zároveň slouží k zjednodušení řešení úloh. Podmínky jednoznačnosti dělíme na:

- geometrické,
- fyzikální,
- počáteční a
- povrchové.


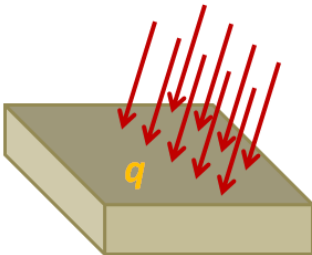
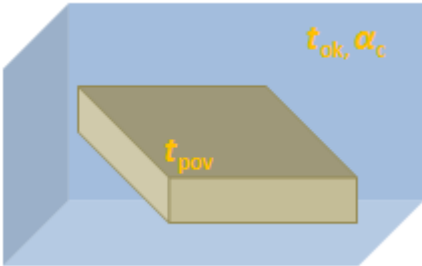
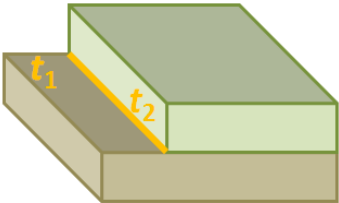
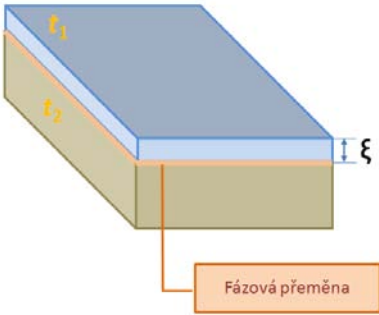
Geometrické podmínky – definují základní tvar tělesa – jeho rozměry. Geometrii tělesa se snažíme vždy uzpůsobit tak, aby byla pro výpočet co nejjednodušší. Avšak dnes, s rozvojem profesionálních CAD systémů a výkonných počítačů, již není problém nakreslit složitý tvar tělesa a následně vypočítat průběh či změnu jakékoliv veličiny.

Fyzikální podmínky – jsou dány fyzikálními charakteristikami tělesa – například hustota, měrná tepelná kapacita, součinitel tepelné vodivosti, součinitel teplotní vodivosti, viskozita apod. Tyto podmínky je nutné znát také v závislosti na teplotě, resp. tlaku (graf). Tyto podmínky jsou rovněž vstupními veličinami pro numerické simulace. Je rozdíl zda je materiál z oceli, nebo PVC, teplený tok je řádově jiný. Proto je pro správnost výpočtu tyto podmínky nutno zadat co nejpřesněji.

Počáteční podmínka – charakterizuje rozložení teploty v tělese na počátku děje v čase τ_0 . Počáteční podmínka se u stacionárních dějů (časově neměnných) nezadává. Zadává se tedy, pokud se teplota mění s časem.

Povrchové podmínky – jsou podmínky, které se týkají povrchu tělesa. Týkají se toho, co se děje na povrchu tělesa, nebo v okolí povrchu tělesa. Rozlišujeme 5 povrchových podmínek, jak je uvedeno v tabulce **TABV02**.

Tabulka TABV02. Povrchové podmínky jednoznačnosti úloh vedení tepla.

podmínka	situace	výklad
I. druh (Dirichletova)		Znám teplotu na povrchu tělesa. Rozložení teploty na povrchu t_{pov} je funkcí souřadnic a času. $t_{\text{pov}} = f(x, y, z, \tau)$
II. druh (Neumannova)		Znám hustotu tepelného toku na povrchu tělesa. Rozložení hustoty tepelného toku q na povrchu tělesa je funkcí souřadnic a času. $q = f(x, y, z, \tau)$
III. druh (Fourierova)		Těleso s teplotou t_{pov} je v prostředí s teplotou okolí t_{ok} . Znám, jak se okolní prostředí chová – znám součinitel přestupu tepla α_c . $q = \alpha_c \cdot (t_{\text{pov}} - t_{\text{ok}})$
IV. druh		Kontakt dvou těles. Dvě různá tělesa jsou v dokonalém kontaktu a jejich styčné povrchy mají stejnou teplotu. $-\lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial t_1}{\partial x}\right) = -\lambda_2 \cdot \left(\frac{\partial t_2}{\partial x}\right) \dots t_1 = t_2$
V. druh		Fázová přeměna. Platí při změně skupenství látky (např. tuhnutí – přeměna kapalně látky v pevnou látku). $-\lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial t_1}{\partial x}\right) = -\lambda_2 \cdot \left(\frac{\partial t_2}{\partial x}\right) + \rho \cdot l \cdot \frac{\partial \xi}{\partial \tau},$ kde l je měrné skupenské teplo ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$) a ξ je tloušťka kapalně fáze (m).

2.2 Příklady vedení tepla

V této kapitole si ukážeme jednoduché případy vedení tepla pro *rovinnou* stěnu a *válcovou* stěnu. Pro zjednodušení – přestup/sdílení tepla bude probíhat stacionárně – nebude se s časem měnit. Budeme určovat hustotu tepelného toku q ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$, resp. $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}$), nebo tepelný tok P (W), který danou stěnou prochází. Probereme si dva případy sdílení tepla pro každou stěnu. V prvním případě budeme znát teplotu na povrchu (površích) stěny a ve druhém případě budeme znát teplotu okolního prostředí, ve kterém se stěna nachází a součinitel přestupu tepla, který nám charakterizuje prostředí, ve kterém je stěna umístěna.

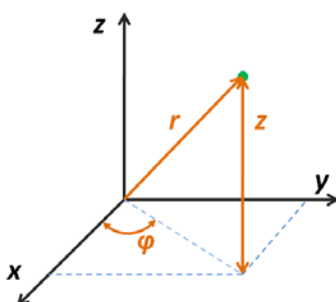
Matematické vyjádření. K matematickému vyjádření bude využita Fourierova rovnice vedení tepla ve tvaru $\nabla^2 t = 0$ (Laplaceova rovnice) a budeme uvažovat jednorozměrové šíření tepla ve směru souřadnice x (resp. r). Jedná se o stacionární vedení tepla, bez vnitřních objemových zdrojů.

Za Laplaceův operátor ∇^2 dosadíme matematické vyjádření podle toho, zda se jedná o *stěnu rovinnou*

$$\left(\frac{d^2 t}{dx^2} + \frac{d^2 t}{dy^2} + \frac{d^2 t}{dz^2} \right) = 0 \quad \dots \quad \left(\frac{d^2 t}{dx^2} \right) = 0 \quad (\text{K} \cdot \text{m}^{-2}),$$

nebo se jedná o *stěnu válcovou*, jak je vidět na obr. **VED03**

$$\left(\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 t}{d\varphi^2} + \frac{d^2 t}{dz^2} \right) = 0 \quad \dots \quad \left(\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} \right) = 0 \quad (\text{K}\cdot\text{m}^{-2}).$$



Obr. VED03 Souřadný systém

kartézský (pravoúhlý) $[x, y, z]$ a cylindrický (polární) $[r, \varphi, z]$ pro ●.

K výpočtu hustoty tepelného toku q budeme využívat *podmínky jednoznačnosti úloh vedení tepla*, které nám dále upřesní (a také zjednoduší) matematické řešení.

Geometrická podmínka. Zvolili jsme nejjednodušší tvary – stěna rovinná je deskou, stěna válcová je válec, nebo jeho část.

Fyzikální podmínka. Děj probíhá bez přítomnosti vnitřních objemových zdrojů a fyzikální veličiny nejsou závislé na teplotě (např. součinitel tepelné vodivosti λ , hustota ρ).

Počáteční podmínka. V případě stacionárního vedení tepla se tato podmínka nezadává, neboť se čas a na něm závislé veličiny v průběhu děje nemění.

Povrchová podmínka. V případě rovinné stěny a válcové stěny využijeme podmínku I. druhu – znám teplotu na povrchu stěny t_{pov} a rovněž využijeme podmínku III. druhu - znám teplotu okolí t_{ok} a charakteristiku okolí α_c .

Rovinná stěna a podmínka I. druhu. Rovinná stěna má tloušťku s a má dva povrchy s teplotami t_1 a t_2 . Není přítomný vnitřní objemový zdroj q_V a hodnota součinitele tepelné vodivosti λ je konstantní a nemění se v průběhu děje – viz obr. VED04. K výpočtu hustoty tepelného toku použijeme Laplaceovu rovnici

$$\left(\frac{d^2 t}{dx^2}\right) = 0 \quad (\text{K} \cdot \text{m}^{-2}).$$

Integrací této rovnice dostaneme výraz pro teplotu, která je lineární funkcí souřadnice x , tedy

$$\frac{dt}{dx} = C_1 \quad \text{další integrace} \quad t = C_1 \cdot x + C_2, \quad \text{kde } C_1 \text{ a } C_2 \text{ jsou integrační konstanty, které určíme}$$

ze dvou povrchových podmínek I. druhu.

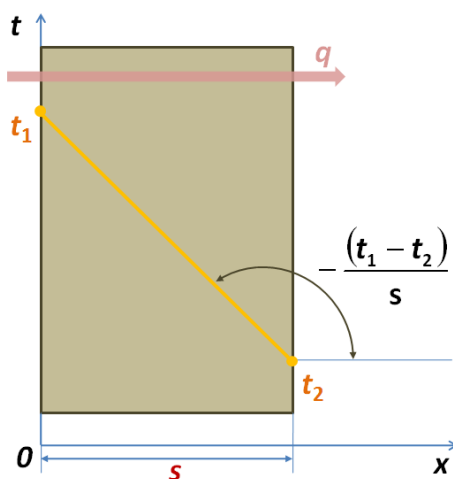
Povrchové podmínky (dle obr. VED04):

$$x = 0 \quad \dots \quad t = t_1 \quad \text{pak po dosazení do rovnice } t = C_1 \cdot x + C_2 \text{ je integrační konstanta } C_2 = t_1$$

a

$$x = s \quad \dots \quad t = t_2 \quad \text{pak po dosazení do rovnice } t = C_1 \cdot x + C_2 \text{ je integrační konstanta}$$

$$C_1 = \frac{t_2 - t_1}{s} = -\frac{(t_1 - t_2)}{s}$$



Obr. VED04. K určení q pro rovinnou stěnu s I. povrchovou podmínkou.

Dosadíme-li vypočtené konstanty C_1 a C_2 do rovnice Laplaceovy $t = C_1 \cdot x + C_2$, pak obdržíme

$t = t_1 - \frac{x \cdot (t_1 - t_2)}{s}$, uvážíme-li, že integrační konstanta C_1 vyjadřuje rovněž gradient teploty,

lze napsat že $C_1 = \frac{dt}{dx} = -\frac{(t_1 - t_2)}{s}$.

A protože hustotu tepelného toku q určíme z prvního Fourierova zákona

$q = -\lambda \cdot \text{grad } t = -\lambda \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)$, dosazením získáme výraz

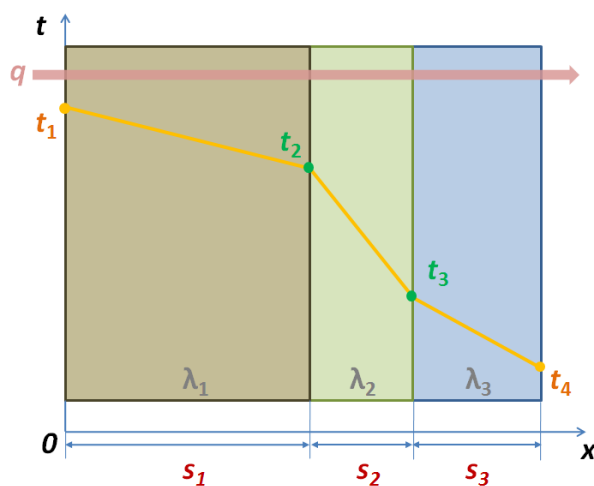
$$q = -\lambda \cdot \left(-\frac{(t_1 - t_2)}{s}\right) \Rightarrow q = \frac{\lambda}{s}(t_1 - t_2) \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}),$$

jenž je základní rovnicí pro určení **hustoty tepelného toku** pro rovinnou stěnu se znalostí povrchové podmínky I. druhu. Hustota tepelného toku je tím vyšší, čím větší je rozdíl teplot na obou površích, čím větší je součinitel tepelné vodivosti a čím menší je tloušťka stěny.

V případě **složené rovinné stěny**, která se skládá z různých materiálů, kde stěny se dokonale stýkají, takže jejich povrchové teploty jsou stejné, platí stejné vyjádření pro hustotu tepelného toku jako pro každou stěnu samostatně. Představme si stěnu složenou například ze tří různých materiálů (obr. **VED05**) o různých tloušťkách s_1, s_2, s_3 a jim příslušných součinitelů tepelné vodivosti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, s teplotami na vnějších površích t_1 a t_4 . Protože se jedná o stacionární, časově neměnný stav, hustota tepelného toku q procházející přes tři stěny má stále stejnou hodnotu, můžeme napsat

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{\lambda_1}{s_1}(t_1 - t_2) \\ q &= \frac{\lambda_2}{s_2}(t_2 - t_3) \\ q &= \frac{\lambda_3}{s_3}(t_3 - t_4) \end{aligned} \right\} \text{ sečtením třech výrazů získáme } q = \frac{t_1 - t_4}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}} \text{ pro složenou rovinnou stěnu.}$$

Na základě těchto jednoduchých rovnic můžeme taktéž dopočítat teploty na rozhraní jednotlivých materiálů t_2 , t_3 . Obě teploty samozřejmě musí nacházet mezi teplotami t_1 a t_4 .



Obr. VED05 Složená rovinná stěna

Obecné vyjádření hustoty tepelného toku pro n -vrstev rovinné stěny

$$q = \frac{t_1 - t_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i}} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}).$$

Příklad 2.1

Rovinnou stěnu je třeba tepelně izolovat tak, aby ztráty tepla povrchem nepřesáhly hodnotu $440 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Teplota povrchu pod izolací $t_1 = 450 \text{ }^\circ\text{C}$, teplota vnějšího povrchu $t_2 = 65 \text{ }^\circ\text{C}$.

Stanovte tloušťku izolace pro dva případy tepelných izolací:

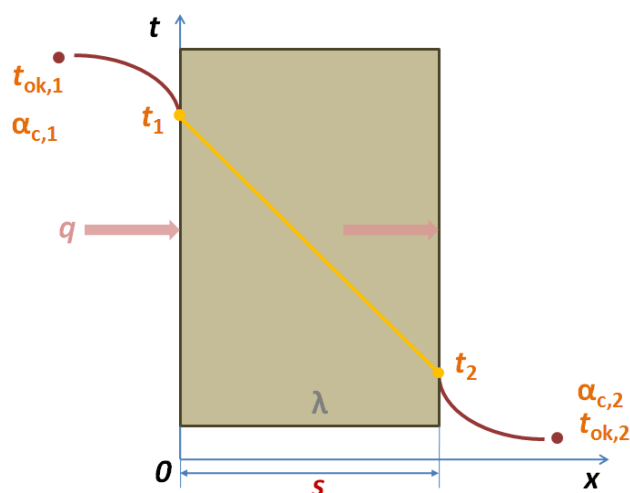
- lehčený šamot
- vermikulitové desky.

Příklad 2.2

Určete hustotu tepelného toku přes stěnu kotle. Vnitřní stěna kotle je pokryta vrstvou rzi o tloušťce 0,95 mm a o součiniteli tepelné vodivosti $\lambda = 0,09 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Ze strany vody je 1,4 mm tlustá vrstva kotelního kamene o $\lambda = 0,7 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Stěna kovového kotle má tloušťku 19 mm a součinitel tepelné vodivosti $\lambda = 51 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Teplota stěny ze strany vody je 165 °C, ze strany ohřevu 625 °C. Určete teploty na rozhraní vrstev.

Rovinná stěna a podmínka III. druhu. Při této úloze bude probíhat sdílení tepla vedením přes rovinnou stěnu a zároveň na obou površích bude probíhat konvekce, tedy proudění tekutiny kolem desky, jak je popsáno ve III. povrchové podmínce $q = \alpha_c \cdot (t_{\text{pov}} - t_{\text{ok}})$. Součinitel přestupu tepla α_c nám charakterizuje okolní prostředí. Na površích rovinné stěny dochází k výměně tepla s okolím prostřednictvím konvekce a někdy také záření (radiace), to znamená, že $\alpha_c = \alpha_{\text{konvekce}} + \alpha_{\text{radiace}}$. Podíl jednotlivých složek (radiace/konvekce) je dán teplotou povrchů stěny. V dalším textu však budeme předpokládat, že bude převládat konvekce. Rovinná stěna s III. povrchovou podmínkou je tedy **kombinovaným přestupem** tepla – *prostupem* tepla - tedy konvekcí a vedením. Další poznatky o součiniteli přestupu tepla α_c jsou uvedeny v kapitole Konvekce.

Situace je na obr. **VED06**. Je zde znázorněna rovinná stěna o tloušťce s , teploty povrchů stěny t_1 a t_2 , součinitel tepelné vodivosti λ stěny. Dále jsou zadány teploty okolních prostředí z obou stran stěny – $t_{\text{ok},1}$ a $t_{\text{ok},2}$ a součinitelé přestupu tepla $\alpha_{c,1}$ a $\alpha_{c,2}$. Budeme určovat, jaká hustota tepelného toku přejde přes rovinnou stěnu.



Obr. VED06. K určení q pro rovinnou stěnu s III. povrchovou podmínkou.

Vycházíme z Laplaceovy rovnice pro jednorozměrové vedení tepla

$$\left(\frac{d^2 t}{dx^2}\right) = 0 \quad (\text{K} \cdot \text{m}^{-2}).$$

Povrchové podmínky (dle obr. VED06):

$$x = 0 \quad \dots \quad \alpha_{c,1}(t_{ok,1} - t_1) = q = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx} \text{ pro levou stranu stěny a}$$

$$x = s \quad \dots \quad \alpha_{c,2}(t_2 - t_{ok,2}) = q = -\lambda \cdot \frac{dt}{dx} \text{ pro pravou stranu stěny, hodnoty } t_1 \text{ a } t_2 \text{ neznáme.}$$

V souladu s obr. VED06 můžeme napsat, že hustota tepelného toku q prochází třemi typy sdílení – konvekce (okolí 1) – vedení stěnou – konvekce (okolí 2). Hustota tepelného toku se nemění, proto můžeme napsat

$$\text{konvekce v okolí 1} \quad q = \alpha_{c,1} \cdot (t_{ok,1} - t_1) \Rightarrow \frac{q}{\alpha_{c,1}} = (t_{ok,1} - t_1),$$

$$\text{vedení ve stěně} \quad \frac{s}{\lambda} \cdot q = (t_1 - t_2),$$

$$\text{konvekce v okolí 2} \quad q = \alpha_{c,2} \cdot (t_2 - t_{ok,2}) \Rightarrow \frac{q}{\alpha_{c,2}} = (t_2 - t_{ok,2}).$$

Sečteme-li tyto tři rovnice, dostaneme výsledný výraz pro **hustotu tepelného toku** q pro rovinnou stěnu

$$q = \frac{t_{ok,1} - t_{ok,2}}{\frac{1}{\alpha_{c,1}} + \frac{s}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{c,2}}} = k \cdot (t_{ok,1} - t_{ok,2}) \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}),$$

kde k je **součinitel prostupu tepla** ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$).

Stejně jako v minulém případě, můžeme z jednotlivých rovnic vypočítat neznámé teploty t_1 a t_2 . Analogický je výraz pro **složenou rovinnou stěnu** s III. povrchovou podmínkou – v případě třech vrstev, resp. pro n -vrstev je výraz následující

$$q = \frac{t_{ok,1} - t_{ok,2}}{\frac{1}{\alpha_{c,1}} + \frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3} + \frac{1}{\alpha_{c,2}}} = \frac{t_{ok,1} - t_{ok,2}}{\frac{1}{\alpha_{c,1}} + \sum_{i=1}^n \frac{s_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_{c,2}}} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}).$$

Povrchová podmínka III. druhu se může změnit na povrchovou podmínku I. druhu v případě, že teplota okolí se blíží teplotě povrchu, nebo součinitel přestupu tepla $\alpha_c = 0$.

Válcová stěna a podmínka I. druhu. K určení hustoty tepelného toku pro válcovou stěnu opět využijeme Laplaceovu rovnici $\nabla^2 t = 0$, ale protože se jedná o válec, Laplaceův operátor vyjádříme v polárních souřadnicích

$$\left(\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} \right) = 0 \quad (\text{K} \cdot \text{m}^{-2})$$

Na obr. **VED07a** je znázorněn dutý válec o poloměrech r_1 a r_2 . Délka válce je mnohem větší než jeho průměr. Na vnitřním povrchu je teplota t_1 a na vnějším povrchu t_2 . Teplotní gradient je ve směru osy válce nulový. Teplota se mění pouze s poloměrem (teplota je funkcí poloměru).

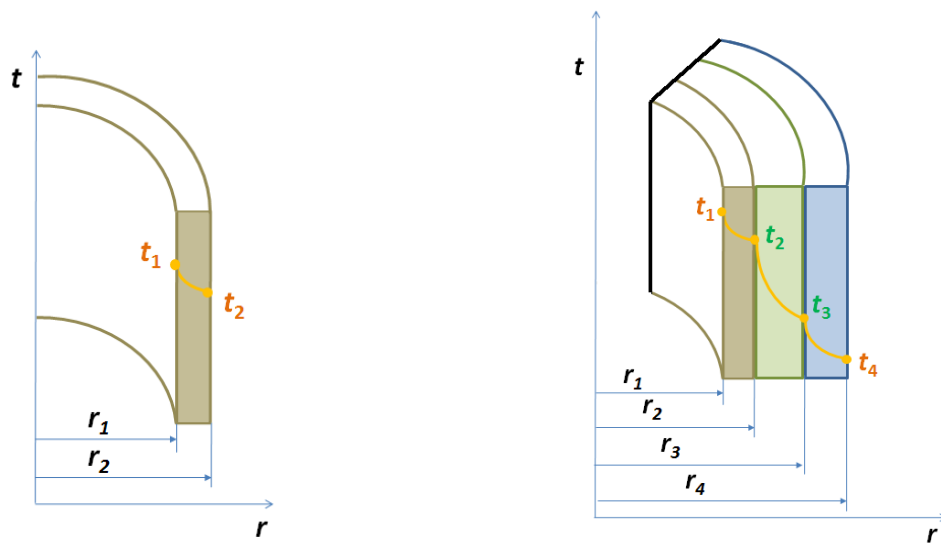
Povrchové podmínky (dle obr. **VED07a**):

pro vnitřní povrch $t = t_1 \quad \dots \quad r = r_1$

pro vnější povrch $t = t_2 \quad \dots \quad r = r_2$.

Vyřešíme-li Laplaceovu rovnici s těmito okrajovými podmínkami, obdržíme výraz

$$t = t_1 - (t_1 - t_2) \cdot \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (^\circ\text{C}),$$



a) jednoduchá válcová stěna

b) složená válcová stěna

Obr. **VED07**. K určení q_1 pro válcovou stěnu s I. povrchovou podmínkou

Jak je vidět z této rovnice, teplota již není lineární funkcí souřadnice (jako v případě rovinné stěny), ale je funkcí logaritmickou. Hustota tepelného toku q se mění s poloměrem válce a q roste směrem k ose válce, protože se zmenšuje (vnitřní) plocha válce. U válcové plochy se uvádí místo hustoty tepelného toku q tepelný tok P . Je to z toho důvodu, aby se nemusela vyjadřovat závislost q na poloměru r . Pro tepelný tok P (z prvního Fourierova zákona) platí

$$P = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} \cdot S = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi \cdot r \cdot l \quad (\text{W})$$

Po dosazení za derivaci $\frac{dt}{dr} = \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_1}{r_2}}$ pak pro **tepelný tok** P platí

$$P = \frac{\pi \cdot l \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{W}).$$

Vztáhneme-li hustotu tepelného toku P na délku válce l , potom dostaneme **lineární hustotu tepelného toku** q_l , tedy

$$q_l = \frac{P}{l} = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-1}).$$

Analogicky pro **složenou válcovou stěnu** (obr. VED07b) složenou ze tří, resp. z n -vrstev platí tato rovnice

$$q_l = \frac{P}{l} = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_4)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{2\lambda_3} \cdot \ln \frac{r_4}{r_3}} = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \ln \frac{r_{i+1}}{r_i}} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-1})$$

Rovněž lze vypočítat teploty na rozhraní dvou vrstev t_2 a t_3 tak, jak bylo uvedeno v případě rovinné stěny a použijeme k tomu již známé výrazy

$$q_l = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad \dots \quad q_l = \frac{\pi \cdot (t_2 - t_3)}{\frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}} \quad \dots \quad q_l = \frac{\pi \cdot (t_3 - t_4)}{\frac{1}{2\lambda_3} \cdot \ln \frac{r_4}{r_3}} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-1}).$$

Příklad 2.3

Kolik tepla za 1 hodinu ztrácí 47 m dlouhé potrubí o tloušťce stěny 8 mm. Potrubí je vyzděno šamotem o tloušťce 36 mm na vnitřní průměr 610 mm a vně je opatřeno izolací o tloušťce 56 mm. Potrubím proudí vzduch, který ohřívá stěnu na teplotu 520 °C. Vnější teplota stěny je 60 °C. Součinitel tepelné vodivosti šamotu je $\lambda = 1,119 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, oceli $\lambda = 50,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a šamotové izolace $\lambda = 0,111 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Rovněž určete teploty na rozhraní obou vrstev.

Válcová stěna a podmínka III.druhu. Probíhající děj je analogický s rovinnou stěnou. Na vnitřním a vnějším povrchu válce probíhá konvekce a zároveň ve válci probíhá vedení. Je to opět kombinovaný přestup tepla.

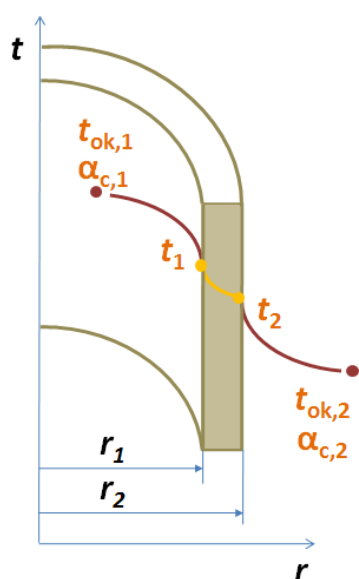
Vycházíme z Laplaceovy rovnice pro jednorozměrové vedení tepla

$$\left(\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dt}{dr} \right) = 0 \quad (\text{K} \cdot \text{m}^{-2}).$$

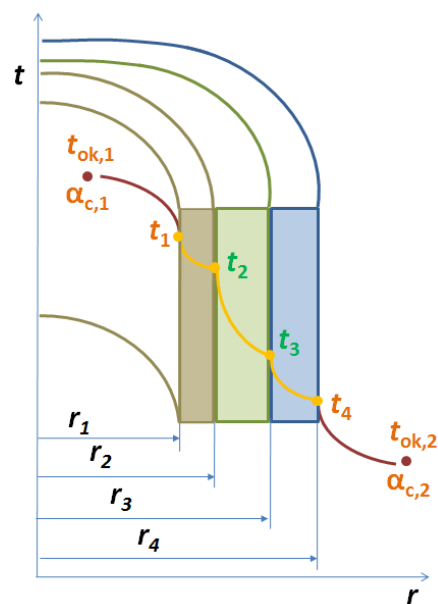
Povrchové podmínky (dle obr. VED08a):

$$r = r_1 \quad \dots \quad \alpha_{c,1} (t_{\text{ok},1} - t_1) \cdot 2\pi \cdot r_1 = q_l = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi \cdot r_1 \quad \text{pro levou stranu stěny a}$$

$$r = r_2 \quad \dots \quad \alpha_{c,2} (t_2 - t_{\text{ok},2}) \cdot 2\pi \cdot r_2 = q_l = -\lambda \cdot \frac{dt}{dr} \cdot 2\pi \cdot r_2 \quad \text{pro pravou stranu stěny, hodnoty } t_1 \text{ a } t_2 \text{ neznáme.}$$



a) jednoduchá stěna



b) složená stěna

Obr. VED08. K určení q_1 pro válcovou stěnu s III. povrchovou podmínkou

V souladu s obr. VED08 můžeme napsat, že lineární hustota tepelného toku q_l prochází třemi typy sdílení – konvekce (okolí 1) – vedení stěnou – konvekce (okolí 2). Lineární hustota tepelného toku se nemění, proto můžeme napsat

$$\text{konvekce v okolí 1} \quad q_l = \alpha_{c,1} \cdot (t_{ok,1} - t_1) \cdot 2\pi \cdot r_1 \Rightarrow \frac{q_l}{\alpha_{c,1} \cdot 2\pi \cdot r_1} = (t_{ok,1} - t_1),$$

$$\text{vedení ve stěně} \quad \frac{q_l}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} \right) = (t_1 - t_2),$$

$$\text{konvekce v okolí 2} \quad q_l = \alpha_{c,2} \cdot (t_2 - t_{ok,2}) \cdot 2\pi \cdot r_2 \Rightarrow \frac{q_l}{\alpha_{c,2} \cdot 2\pi \cdot r_2} = (t_2 - t_{ok,2}).$$

Sečteme-li tyto tři rovnice, dostaneme výsledný výraz pro **lineární hustotu tepelného toku** q_l pro válcovou stěnu

$$q_l = \frac{\pi \cdot (t_{ok,1} - t_{ok,2})}{\frac{1}{2r_1 \cdot \alpha_{c,1}} + \frac{1}{2\lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2r_2 \cdot \alpha_{c,2}}} = k_l \cdot \pi \cdot (t_{ok,1} - t_{ok,2}) \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-1}),$$

kde k_l je **lineární součinitel prostupu tepla** ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Lineární součinitel prostupu tepla charakterizuje teplo, které projde 1 m délky válcové stěny. Ze součinitele válcové stěny k_l lze odvodit lineární měrný tepelný odpor R_l válcové stěny, tedy:

$$R_l = \frac{1}{k_l} = \frac{1}{2r_1 \cdot \alpha_{c,1}} + \frac{1}{2\lambda} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2r_2 \cdot \alpha_{c,2}} = R_{l,\alpha_1} + R_{l,\lambda} + R_{l,\alpha_2} \quad (\text{m} \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1})$$

Odpor R_l je součtem lineárních měrných tepelných odporů na površích válcové stěny (R_{l,α_1} a R_{l,α_2}) a lineárního měrného tepelného odporu vlastní válcové stěny ($R_{l,\lambda}$).

Budeme-li mít válcovou stěnu s vnějším poloměrem r_2 , které je neizolovaná, pak lineární měrný tepelný odpor stěny $R_{1,\lambda}$ s rostoucím poloměrem r_2 stoupá, zatímco lineární měrný tepelný odpor $R_{1,\alpha 2}$ se s rostoucím poloměrem r_2 zmenšuje. Lineární měrný tepelný odpor na vnitřním povrchu $R_{1,\alpha 1}$ je vzhledem k r_2 konstantní. Z následujícího obrázku **VED09** plyne, že existuje určitý poloměr r_2 , kde je hodnota R_1 – lineárního měrného tepelného odporu minimální. Tento poloměr se nazývá **kritický poloměr válcové stěny**.

Válcová stěna s kritickým poloměrem má maximální ztráty tepla do okolí a každé zvětšení, nebo zmenšení tloušťky stěny válce znamená snížení tepelného toku z povrchu stěny do okolí.

Kritický poloměr neizolované válcové stěny je

$$r_{kr} = \frac{\lambda}{\alpha_{c,2}} \quad (\text{m}), \text{ což znamená,}$$

že při $r_{kr} < r_2$... s rostoucím vnějším poloměrem r_2 se lineární měrný tepelný odpor R_1 zvětšuje; při $r_{kr} > r_2$ se R_1 zmenšuje až do hodnoty, kdy $r_{kr} = r_2$.

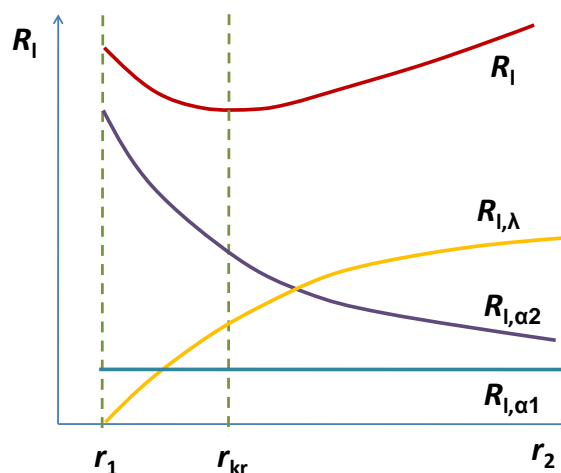
Kritický poloměr válcové stěny je důležitým faktorem při návrhu izolace potrubí. U izolované válcové stěny je lineární měrný tepelný odpor dán rovnicí

$$R_l = \frac{1}{2r_1 \cdot \alpha_{c,1}} + \frac{1}{2\lambda_{\text{válec}}} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\lambda_{\text{izolace}}} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{2r_3 \cdot \alpha_{c,2}} \quad (\text{m.K.W}^{-1}).$$

Kritický poloměr izolace pro válcovou stěnu pak určíme

$$r_{kr,iz} = \frac{\lambda_{iz}}{\alpha_{c,2}} \quad (\text{m})$$

Je-li $r_{kr,iz} = r_3$ je lineární měrný tepelný odpor minimální a jsou maximální tepelné ztráty q_1 .



Obr. VED09 K vysvětlení pojmu kritický poloměr válcové stěny.

Zvětšování tloušťky izolace v rozmezí r_2 až $r_{kr,iz}$ tedy zapříčiňuje zvýšení tepelných ztrát. Při dosažení $r_{kr,iz} = r_3$ jsou ztráty tepla izolovanou trubkou stejně veliké jako pro trubku neizolovanou ($r_2 = r_3$). To znamená, že až do hodnoty $r_3 = r_{3,ef}$ není izolace efektivní.

Poloměr $r_{3,ef}$ se určí z následujícího vztahu (iterací)

$$\frac{1}{2\lambda_{iz}} \cdot \ln \frac{r_{3,ef}}{r_2} + \frac{1}{2r_{3,ef} \cdot \alpha_{c,2}} = \frac{1}{2r_2 \cdot \alpha_{c,2}} \quad (\text{m.K.W}^{-1})$$

Součinitel tepelné vodivosti izolace λ_{iz} se musí volit tak, aby $r_{kr,iz}$ bylo menší nebo rovno r_2 . Pak je zřejmé, že $r_3 > r_{kr,iz}$ a izolace zvyšuje lineární měrný tepelný odpor a snižuje ztráty tepla do okolí.

Pro složenou válcovou stěnu (obr. VED08b) ze tří, resp. n -vrstev platí výraz

$$q_l = \frac{\pi \cdot (t_{ok,1} - t_{ok,2})}{\frac{1}{2r_1 \cdot \alpha_{c,1}} + \frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{2\lambda_3} \cdot \ln \frac{r_4}{r_3} + \frac{1}{2r_2 \cdot \alpha_{c,2}}} \Rightarrow$$

$$q_l = \frac{\pi \cdot (t_{ok,1} - t_{ok,2})}{\frac{1}{2r_1 \cdot \alpha_{c,1}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \cdot \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{2r_2 \cdot \alpha_{c,2}}} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-1})$$

Zároveň lze vypočítat teploty na rozhraní jednotlivých vrstev z výše uvedených rovnic. Je patrné, že pro válcovou stěnu platí stejné zákonitosti jako pro stěnu rovinnou.

Poznámka k II. povrchové podmínce. Pokud je zadaná povrchová podmínka II. druhu („Znám hustotu tepelného toku na povrchu stěny.“) není tato podmínka (v těchto uvedených případech) jednoznačně zadaná, protože

$$q = \frac{\lambda}{s} (t_1 - t_2) \quad \dots \text{ a nelze spočítat teploty } t_1 \text{ a } t_2.$$

Proto při stacionárním vedení tepla může být povrchová podmínka zadána pouze na jednom povrchu a na druhém povrchu musí být zadána podmínka I. nebo III. druhu.



Shrnutí pojmů kapitoly 2

Sdílení tepla vedením souvisí s tepelným pohybem molekul, atomů a iontů a jejich vzájemnou interakcí. Sdílení tepla vedením se uskutečňuje převážně v pevných neprůhledných látkách. Podmínkou je nerovnoměrné rozložení teplot v tělese.

Teplotní pole rozlišujeme stacionární (časově nezávislé) a nestacionární (časově závislé). Teplotní pole je jednorozměrné, dvourozměrné, nebo trojrozměrné, v závislosti na daných souřadnicích a v závislosti na probíhající ději.

Místa se stejnou teplotou v teplotním poli jsou **izotermy**. Nárůst teploty ve směru normály je **gradient teploty**. **Hustota tepelného toku** q ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) je úměrná gradientu teploty, což

vyjadřuje I. Fourierův zákon. Pokud hustotu tepelného toku vztáhneme na určitou plochu, pak hovoříme o **tepelném toku** P , pokud přidáme časovou složku, pak hovoříme o **teplu** Q .

Součinitel tepelné vodivosti λ je termofyzikální parametr látky, závislý na teplotě, na chemickém složení materiálu a na struktuře materiálu. Různé látky/materiály mají různé součinitele tepelné vodivosti a mezi sebou se mohou lišit až o několik řádů.

Fourierova rovnice vedení tepla (II. Fourierův zákon) nám popisuje chování materiálu při sdílení tepla vedením v čase. Základní tvar rovnice je odvozen z rovnováhy třech tepel – entalpie, tepla přivedené materiálem v důsledku tepelné vodivosti a tepla, které uvolní vnitřní objemové zdroje v tělese.

Podmínky jednoznačnosti nám dovolují zjednodušit a tím i řešit Fourierovu rovnici vedení tepla. Rozeznáváme podmínky geometrické, fyzikální, počáteční a povrchové.



Otázky ke kapitole 2

1. Co je to teplotní pole?
2. Může být teplotní pole závislé na čase, či nikoliv?
3. Co nazýváme izotermickou plochou, co nazýváme izotermou?
4. Co nazýváme gradientem teploty?
5. Napište matematické vyjádření gradientu teploty pro kartézský a polární souřadnicový systém.
6. Vysvětlete rozdíl mezi hustotou tepelného toku, tepelným tokem a teplem. Uveďte vzorce a jednotky.
7. Definuj I. Fourierův zákon a matematicky jej vyjádři.
8. V čem spočívá II. zákon termodynamiky. Dovedete si vzpomenout na I. a III. zákon termodynamiky?
9. Jakých hodnot nabývá součinitel tepelné vodivosti pro tuhé kapalné a plynné látky obecně.
10. Je součinitel tepelné vodivosti závislý na teplotě?

11. Popiš metody určení součinitele tepelné vodivosti.
12. Kdy má voda nejvyšší hodnotu součinitele tepelné vodivosti? Nakresli závislost.
13. Na vybraném materiálu urči hodnotu součinitele tepelné vodivosti (např. ocel, izolační materiál, apod.).
14. Proč se zavádí efektivní součinitel tepelné vodivosti?
15. Jaké látky vedou špatně teplo?
16. O čem hovoří II. Fourierův zákon? Co je jeho podstata. Matematické odvození.
17. Co je to elementární objem?
18. Co nazýváme vnitřním objemovým tepelným zdrojem? Jednotka.
19. Co je entalpie. Jednotka, matematické vyjádření.
20. Co je to součinitel teplotní vodivosti. Jednotka, matematické vyjádření.
21. Jaký je rozdíl mezi součinitelem tepelné vodivosti a součinitelem teplotní vodivosti. Jaké jsou jejich jednotky?
22. Co jsou to přenosové jevy. Uveďte příklady těchto jevů.
23. Napište všechny možné a správné varianty II. Fourierova zákona. Odůvodněte jejich rozdíly.
24. Co jsou to podmínky jednoznačnosti?
25. Popište druhy podmínek jednoznačnosti.
26. Kdy je nutné použít počáteční podmínku a kdy není nutné.
27. Vyjmenujte všechny povrchové podmínky, napište jejich matematické vyjádření a uveďte konkrétní příklady z praxe.
28. Jak určíme hustotu tepelného toku pro rovinnou stěnu s I. povrchovou podmínkou?
29. Jak určíme hustotu tepelného toku pro rovinnou stěnu s III. povrchovou podmínkou?
30. Jak určíme hustotu tepelného toku pro válcovou stěnu s I. povrchovou podmínkou?
31. Jak určíme hustotu tepelného toku pro válcovou stěnu s III. povrchovou podmínkou?
32. Co je to kombinovaný přestup tepla? Uveď příklad.

33. Co je to součinitel přestupu tepla konvekci? Jednotka.
34. Co nazýváme součinitelem prostupu tepla? Jednotka.
35. Kde se setkáme s lineární hustotou tepelného toku?
36. Co je to kritický poloměr válcové stěny?
37. Jak stanovíme optimální průměr tepelné izolace pro trubku?
38. Kde použijeme II. povrchovou podmínku? Uveďte příklad.
39. Kde použijeme IV. a V. povrchovou podmínku. Uveďte příklad.

3. KONVEKCE A HYDRODYNAMIKA

Sdílení tepla konvekcí se uskutečňuje v pohybujícím (proudícím) se prostředí. Kapitola je rozdělena na část věnující se hydrodynamice, ve které jsou popsány základní zákonitosti a matematické rovnice a na část, která se věnuje konvekci, která kromě proudění uvažuje ještě přestup tepla.

3.1. Fyzikální vlastnosti tekutin



Čas ke studiu: 15 hodin



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- vyjmenovat základní a odvozené veličiny a jejich jednotky,
- definovat, co je to geometrický tlak, dynamický tlak, celkový tlak, statický tlak a ztrátový tlak,
- vysvětlit základní vztahy pro ideální plyn, tedy definovat Boyleův – Mariottův zákon, Gay – Lussacův zákon, Charlesův zákon,
- definovat základní stavovou rovnici ideálního plynu,
- objasnit si pojmy jako stlačitelnost, roztažnost a rozpínavost,
- vysvětlit pojmy dynamická a kinematická viskozita, tečné napětí, povrchové napětí tekutin,
- definovat pojmy mokrá pára, sytá pára, přehřátá pára,
- vysvětlit a vyjádřit základní rovnice hydromechaniky – tedy Eulerovy rovnice (pro hydrostatiku a hydrodynamiku), rovnici kontinuity, Navierovu – Stokesovu rovnici, Bernoulliho rovnici,
- definovat Pascalův a Archimédův zákon,
- vyjádřit a aplikovat, jak se chovají dva plyny v klidu,
- definovat a vysvětlit jaké druhy proudění tekutin rozeznáváme,
- definovat laminární a turbulentní proudění,
- použít Reynoldsovo kritérium pro rozlišení typu proudění tekutin,
- vyjádřit hydraulické ztráty v potrubí, definovat jednotlivé typy tlakových ztrát a umět je vypočítat,
- definovat typy drsností povrchů trubek a kanálů při proudění,

- vysvětlit na jakém principu funguje komín,
- definovat a určit proudění tekutin v tryskách při různých rychlostech,
- vypočítat a použít Machovo číslo (kritérium),
- definovat sdílení tepla konvekcí a rozlišit mezi konvekcí přirozenou a nucenou,
- určit součinitel přestupu tepla konvekcí, pomocí kritérií a kritériálních rovnic,
- vyjádřit Fourierovu – Kirchhoffovu rovnici.



Výklad

Základními veličinami (a jejich jednotkami), dle mezinárodního ujednání, jsou:

délka (m), hmotnost (kg), čas (s), elektrický proud (A), termodynamická teplota (K), látkové množství (mol), svítivost (cd).

Doplňkovými veličinami jsou: rovinný úhel (rad) a prostorový úhel (srad). Ostatní veličiny jsou veličiny odvozené na základě definičních rovnic. Základní a odvozené veličiny založené na soustavě definičních rovnic tvoří soustavu veličin.

Následující tabulka **KON01** ukazuje rozměry některých používaných veličin a jejich jednotek pomocí SI.

Hustota je hmotnost objemové jednotky tekutiny. Vyjadřuje se vztahem:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$$

Reciproká hodnota hustoty je **měrný objem** v .

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} \quad (\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1})$$

Protože objem V je stavovou veličinou, mění se se změnou teploty a tlaku, tak rovněž i hustota se mění se změnou teploty a tlaku.

Tabulka KON01 Rozměry některých běžně používaných veličin

Fyzikální veličina	Jednotka	Rozměrové exponenty		
		m	kg	s
Síla	N (newton)	1	1	-2
Práce, teplo	J (joule)	2	1	-2
Výkon, tepelný tok	W (watt)	2	1	-3
Tlak	Pa (pascal)	-1	1	-2

Tlak je definován jako síla působící na plochu. Jednotkou je 1 Pascal, tj. síla 1 N působící na plochu 1m^2 . Tedy

$$p = \frac{F}{S} \quad (\text{Pa}) \text{ při rovnoměrném působení síly a}$$

$$p = \frac{dF}{dS} \quad (\text{Pa}) \text{ při nerovnoměrném rozložení síly.}$$

Geometrický tlak p_g je určen působením tíhové síly tekutiny na jednotku plochy. Tedy

$$p = \frac{F}{S} = \frac{m \cdot g}{S} = \frac{h \cdot \rho \cdot S \cdot g}{S} = h \cdot \rho \cdot g \quad (\text{Pa})$$

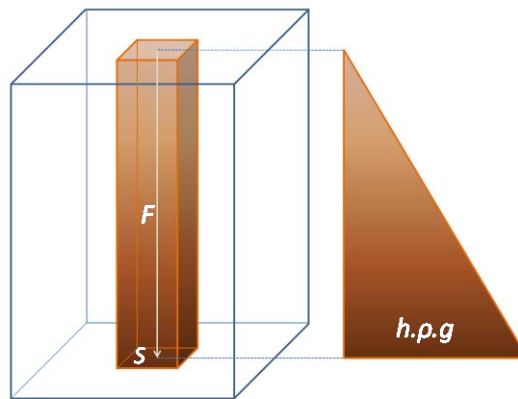
Na obr. KON01 je nádoba naplněná tekutinou a v ní je vyčleněn hranol o průřezu S a výšce h . Tlaková síla F (v tíhovém zemském poli) působí v ploše S na dno nádoby a vyvolá tlak, jenž je nazýván tlakem geometrickým, resp. **hydrostatickým** (u kapalin) a **aerostatickým** (u plynů).

Výsledný geometrický tlak při vzájemném působení dvou plynů, např. okolní atmosféra a spaliny, je dán rozdílem jejich geometrických tlaků:

$$p_g = h \cdot g \cdot \rho_{\text{ok}} - h \cdot g \cdot \rho_{\text{sp}} = h \cdot g \cdot (\rho_{\text{ok}} - \rho_{\text{sp}}) \quad (\text{Pa})$$

Při proudění tekutin (např. v potrubí), tedy pro tekutiny, které nejsou v klidu, ale v pohybu je celkový tlak dán součtem tlaku statického a dynamického, tedy

$$p_{\text{celkový}} = p_{\text{statický}} + p_{\text{dynamický}} \quad (\text{Pa})$$



Obr. KON01 Znárodnění působení tlaku v tekutině vlivem tíhové síly

Statický tlak p_s , nazývaný též tlak **manometrický**, je určen rozdílem tlaku tekutiny uzavřené v nádobě proti okolnímu tlaku. Je-li hodnota statického tlaku kladná, jedná se o **přetlak**, je-li záporná – **podtlak**. Statický tlak charakterizuje potenciální energii.

Dynamický tlak p_d – se projevuje jen při proudění tekutiny. Jeho vyjádření vychází ze vztahu pro kinetickou energii.

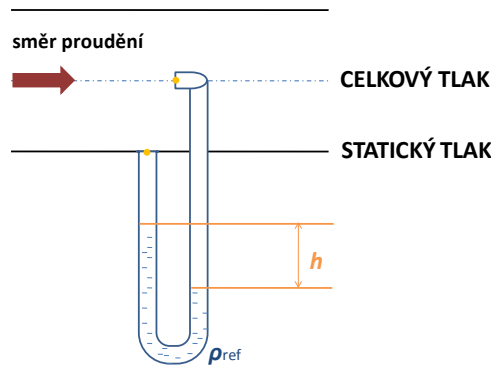
$$p_d = \frac{\rho \cdot v^2}{2} \quad (\text{Pa}) \quad \dots \quad E_k = \frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{V \cdot \rho \cdot v^2}{2} = \frac{1 \cdot \rho \cdot v^2}{2} = p_d$$

Dynamický tlak charakterizuje kinetickou energii tekutiny a lze jej stanovit měření pomocí *Pitotovy trubice* (viz obr. KON02) Dynamický tlak lze určit na základě výše popsané rovnice. Při měření Pitotovou trubicí je tenká trubička zavedena do stěny potrubí a druhá trubička do osy potrubí. Při stěně potrubí je měřen tlak statický, v ose potrubí je měřen tlak celkový. V Pitotově trubicí je uzavřena referenční kapalina určité hustoty ρ_{ref} . Změny tlaků statického a celkového pak vytlačují/posunují kapalinu. Rozdíl hladin referenční kapaliny je označen h . Dynamický tlak pak lze jednoduše určit

$$p_d = h \cdot g \cdot \rho_{\text{ref}} \quad (\text{Pa})$$

K současnému měření celkového, statického tlaku a rychlosti proudící tekutiny slouží *Prandtlova trubice*.

Ztrátový tlak p_z – je tlak daný ztrátami při proudění tekutin v potrubích, či kanálech. Jedná se o ztráty tlaku třením, ztráty tlaku místními odpory a ztráty tlaku vztlakovou silou. Podrobně bude ztrátový tlak popsán v kapitole Hydraulické ztráty.



Obr. KON02 Měření dynamického tlaku pomocí Pitotovy trubice

Boylův – Mariottův zákon: Při stálé teplotě jsou tlaky p_1 a p_2 téhož plynu v nepřímém poměru příslušných objemů (V_1 a V_2), popř. měrných objemů (v_1 a v_2), tedy:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

Gayův – Lussacův zákon: Určuje závislost změny objemu plynu na teplotě při konstantním tlaku. Objem plynu V při teplotě t se stanoví vztahem

$$V = V_0(1 + \gamma \cdot t),$$

kde V_0 je objem plynu při 0°C , nebo $T_0 = 273,15\text{ K}$; součinitel objemové roztažnosti

$$\text{plynu } \gamma = \frac{1}{273,15}.$$

Porovnáváme-li dva stavy označené indexy 1 a 2 pak platí:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1 + \gamma \cdot t_1}{1 + \gamma \cdot t_2} = \frac{1 + \frac{1}{273,15} \cdot t_1}{1 + \frac{1}{273,15} \cdot t_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Charlesův zákon: Určuje závislost změny tlaku plynu na teplotě při konstantním objemu plynu. Závislost tlaku na teplotě se stanoví vztahem:

$$p = p_0(1 + \beta \cdot t)$$

kde p_0 je tlak plynu při $0\text{ }^\circ\text{C}$, nebo $T_0 = 273,15\text{ K}$; rozpínavost plynu $\beta = \frac{1}{273,15}$.

Analogicky, jako u Gayova – Lussacova zákona, pro dva stavy označené indexy 1 a 2 pak lze vyjádřit:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{1 + \beta \cdot t_1}{1 + \beta \cdot t_2} = \frac{1 + \frac{1}{273,15} \cdot t_1}{1 + \frac{1}{273,15} \cdot t_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

Spojením těchto tří zákonů lze odvodit stavovou rovnici ideálního plynu jako vzájemnou závislost p , v , T , tedy:

$$\frac{p \cdot v}{T} = \text{konst.} = r = \frac{R_m}{M} \quad (\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}),$$

kde r je měrná plynová konstanta. Ta je dána poměrem molární plynové konstanty ($R_m = 8,314\text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) a molární hmotnosti plynu ($\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$). Po dosazení za měrný objem a pro m (kg) plynu pak obdržíme rovnici

$$p \cdot V = m \cdot r \cdot T$$

$$\text{resp. } p \cdot V = n \cdot R_m \cdot T$$

Pro *reálné plyny*, počítaje s korekcí na nestlačitelnou část objemu a existenci přitažlivých sil, platí van der Waalsova stavová rovnice, kde a je konstanta, charakterizující vliv přitažlivých sil ($\text{Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2}$) a b je konstanta, charakterizující molární nestlačitelný objem plynu ($\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$)

$$\left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2} \right) \cdot (V - n \cdot b) = n \cdot R_m \cdot T \quad (\text{J})$$

Pro praktické výpočty se s dostatečnou přesností používá stavová rovnice ideálního plynu.

Stlačitelnost je vlastnost tekutin a těles zmenšovat svůj objem při zvýšení vnějšího tlaku při konstantní teplotě.

Stlačitelnost se vyjadřuje součinitelem stlačitelnosti δ

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} \cdot \frac{1}{\Delta p} = \frac{V - V_0}{V} \cdot \frac{1}{p_0 - p} \quad (\text{m}^2 \cdot \text{N}),$$

kde ΔV je změna objemu připadající na jednotku původního objemu V a jednotku změny tlaku Δp při konstantní teplotě ($V > V_0$; $p_0 > p$). Z uvedené rovnice vyplývá vztah pro objem po stlačení

$$V_0 = V(1 - \delta \cdot \Delta p)$$

Převrácená hodnota součinitele stlačitelnosti δ se nazývá modul objemové pružnosti tekutiny K

$$K = \frac{1}{\delta} \quad (\text{N} \cdot \text{m}^2 = \text{Pa})$$

Modul objemové pružnosti tekutiny K je např. pro vodu $K = 2,1 \cdot 10^9$ Pa .

Při stlačování se hmotnost tekutiny nemění, proto platí $m = \rho \cdot V = \text{konst.}$ Diferencováním této rovnice pak dostaneme $\rho \cdot dV + V \cdot d\rho = 0$, z čehož pro poměrnou objemovou změnu

vyplývá vztah $-\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho}$. Modul objemové pružnosti lze tedy vyjádřit takto

$$K = -V \cdot \frac{dp}{dV} = \rho \cdot \frac{dp}{d\rho} \quad \text{a zároveň platí} \quad \frac{K}{\rho} = \frac{dp}{d\rho} = a^2,$$

kde a je rychlost šíření zvuku. Rychlost zvuku ve vodě pak po dosazení je $1\,515,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Pro určení rychlosti zvuku v tuhých látkách platí analogicky výše uvedená rovnice, dosadíme pouze modul pružnosti v tahu a hustotu příslušného tuhého tělesa. Pro rychlost zvuku v plynných látkách je rozhodující stavová změna. Protože zvukové vlny mají krátké doby kmitu, nemůže docházet k výměně tepla plynu s okolím a děj je přibližně adiabatický. Rychlost zvuku v plynech pak nabývá na tvaru

$$a = \sqrt{\chi \cdot \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\chi \cdot r \cdot T} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

Pro určení rychlost zvuku vzduchu je $\chi = 1,4$ (izoentropický koeficient), měrná plynová konstanta $r = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a teplota rovna $0 \text{ }^\circ\text{C}$. Po dosazení do rovnice pak rychlost vzduchu $a = 331,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Změna objemu kapaliny při nevelkých tlakových změnách je velmi malá a proto můžeme kapaliny považovat za nestlačitelné. Stlačitelnost kapaliny bereme v úvahu při tlakových kmitech, např. při hydraulickém rázu.

Roztažnost tekutin je změna objemu tekutiny s teplotou za konstantního tlaku. Teplotní objemová roztažnost je dána vztahem

$$\gamma = \frac{1}{V_0} \cdot \frac{dV}{dT} \quad (\text{K}^{-1}).$$

Teplotní objemová roztažnost je nejvíce patrná u plynů a par, menší pak u kapalin a tuhých látek.

Rozpínavost tekutin je charakterizována změnou tlaku v tekutině s teplotou při konstantním objemu a je dána vztahem

$$\beta = \frac{1}{p_0} \cdot \frac{dp}{dT} \quad (\text{K}^{-1})$$

Pro plyny platí, že roztažnost je rovna rozpínavosti $\gamma = \beta = \frac{1}{273,15} \text{ K}^{-1}$.

Viskozita tekutin se projevuje při proudění skutečných tekutin, tedy všude tam, kde se projevuje odpor proti pohybu tekutiny. Představme si proudění ve vodorovném směru (obr. **KON03**) podél desky jako pohyb vrstev o tloušťce dy , které jsou rovnoběžné s deskou. Na desce je rychlost částic tekutiny nulová (ulpívání částic). Rychlost ostatních vrstev tekutiny se zvětšuje se vzdáleností od desky (brzdicí účinek desky se zmenšuje). Jednotlivé vrstvy desky se vzájemně po sobě pohybují rozdílnými rychlostmi, takže dochází k jejich vzájemnému posuvu. Mezi vrstvami působí *smykové (třecí) síly*, které jsou vyvolány viskozitou tekutiny. Tento jev popsal již anglický fyzik I. Newton a formuloval jej do vztahu pro **smykové (tečné) napětí τ**

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy} \quad (\text{Pa}),$$

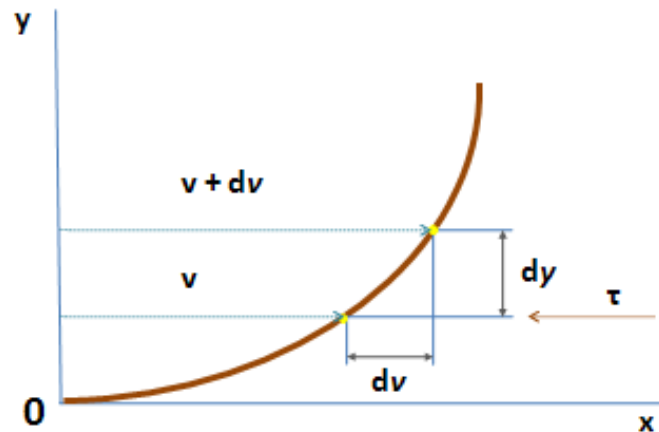
Derivace $\frac{dv}{dy}$ představuje gradient rychlosti v kolmém směru na pohyb tekutiny. Úměra mezi gradientem rychlosti a tečným napětím τ vyjadřuje veličina η , která je **dynamickou viskozitou**, pro niž platí:

$$\eta = \frac{\tau}{\frac{dv}{dy}} \quad \left(\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \cdot \text{s} = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \right)$$

η je zároveň konstantou úměrnosti mezi tečným napětím v tekutině a gradientem rychlosti. Rozměr dynamické viskozity obsahuje jednotku síly, odtud název dynamická. V praxi se rovněž setkáme s **viskozitou kinematickou**, jejíž název je odvozen od slova kinematika a zkoumá se tedy pohyb z hlediska dráhy, rychlosti a zrychlení, čemuž napovídá i rozměr kinematické viskozity, tedy:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}).$$

Viskozita je závislá na teplotě. Pro kapaliny s nárůstem teploty viskozita klesá a pro plyny viskozita s nárůstem teploty roste. Viskozita se měří viskozimetry (např. výtokový, průtokový, rotační, tělískový). Hodnoty viskozity v závislosti na teplotě nalezneme v tabulkách.

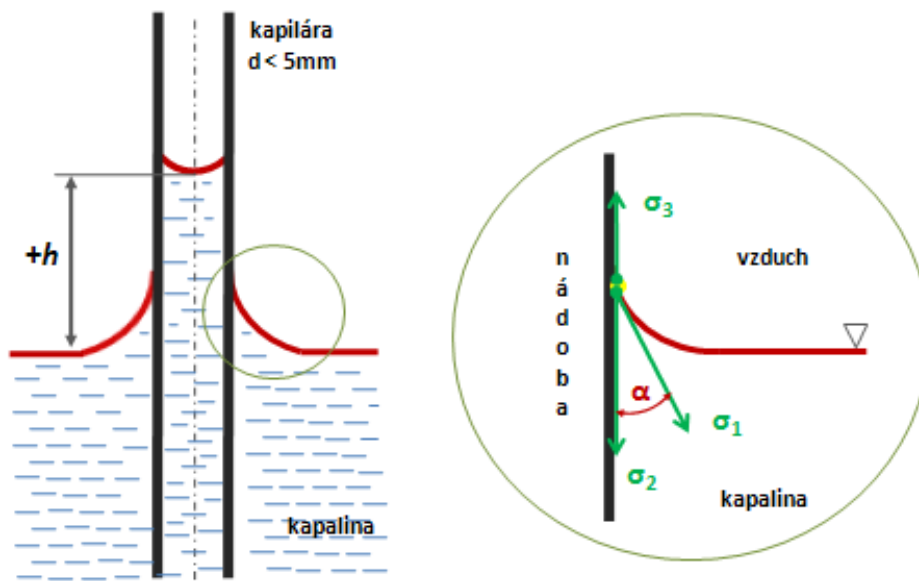


Obr. KON03 Grafické znázornění pro popis dynamické viskozity.

S pojmem smykového napětí souvisí pojem ideální a skutečná tekutina. **Ideální (dokonalá) tekutina** nemá vnitřní tření (nemá tečná napětí) a je nestlačitelná. Dokonalá tekutina může být namáhána jen tlakem. Zavedením tohoto pojmu lze jednodušeji odvodit některé rovnice hydrostatiky. **Skutečná tekutina** již může být namáhána smykovou silou, obsahuje tedy tečné napětí.

S tvorbou kapek a bublin, s rozprašováním kapaliny, kondenzace par, zúžením paprsku kapaliny, nebo s kapilárními jevy nebo smáčením povrchu je spojeno **povrchové napětí kapalin**. Kapalina na rozhraní s jinou látkou se vyznačuje odlišnými vlastnostmi, než má ostatní objem kapaliny. Rozhraní kapaliny se jeví, jako by bylo potaženo velmi tenkou napjatou vrstvou. Příčinou je právě povrchové napětí σ . Účinek povrchového napětí se projeví v kapiláře stoupáním, nebo klesáním sloupce vůči okolní kapalině. Rovněž i rozstříknutá kapalina na malé kapičky zaujímá kulovitý tvar.

Povrchové napětí je vázáno na tenkou vrstvu kapaliny na rozhraní s jinou látkou, kterou může být tuhá, kapalná nebo plynná látka. Tyto látky však mezi sebou nesmí reagovat. Máme-li kapalinu v nádobě, tedy *stěnu nádoby – kapalinu – vzduch*, povrchová energie se snaží být minimální. Na hranici stěny nádoba – kapalina je tato energie nejmenší, proto se snaží kapalina zvětšit svou stykovou plochu a kapalina se zvedne ke stěně. V úzké kapiláře pak se sloupec kapaliny zvedne, hladina se zakříví, jak je patrné z obr. KON04. Schopnost kapaliny se zvedat-elevace (např. voda), resp. klesat-deprese (např. rtuť) se nazývá *kapilarita*.



Obr. KON04 Povrchové napětí na rozhraní tří látek.

Rovnováha sil na rozhraní tří látek je vyjádřena nulovou složkou podél stěny:

$$\sigma_2 = \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \cos \alpha$$

Úhel α rozhraní na stěně závisí na povrchových napětích tří rozhraní:

- při $\sigma_1 = \sigma_2 - \sigma_3$ je $\cos \alpha = 1 \dots$ kapalina smáčí povrch, na němž se rozprostře v tenkou vrstvu,
- při $\sigma_2 > \sigma_3$ je $\cos \alpha > 0$ a $\alpha < 90^\circ$ - kapalina smáčí stěnu nádoby,
- při $\sigma_2 < \sigma_3$ je $\cos \alpha < 0$ a $\alpha > 90^\circ$ - kapalina nesmáčí stěnu nádoby.

Povrchové napětí σ se určuje experimentálně pomocí kapiláry a vyhodnocuje se z rovnováhy síly povrchového napětí a tíhy sloupce kapaliny, tedy:

$$\sigma \cdot 2\pi \cdot r = \rho \cdot g \cdot h \cdot \pi \cdot r^2$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot r = \frac{1}{4} \cdot \rho \cdot g \cdot h \cdot d \quad (\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$$

Povrchové napětí při elevaci vyvolává snížení tlaku o hodnotu $\Delta p = \rho \cdot g \cdot h$ (hydrostatický tlak), který lze pak následně určit *kapilární tlak*

$$\Delta p = \frac{2 \cdot \sigma}{r}$$

Při výpočtu hydrostatického tlaku v kapilárách je nutno s kapilárním tlakem počítat. Při elevaci se odčítá od hydrostatického tlaku, při depresi se k hydrostatickému tlaku přičítá.

Termodynamika směsi plyn-pára. Pára je plynným stavem látky, jenž dovede měnit svůj tvar a objem. Parami nazýváme reálné plyny, které jsou v technicky užívaném rozsahu teplot již v blízkosti stavu nasycení, tedy pod kritickou teplotou. Např. pro vodu je maximální (kritická) teplota, kdy ještě může existovat v kapalném stavu je 374,15 °C.

Obecně platí pro termodynamiku směsi pára-kapalina tyto technologické stavy:

Mokrá pára – je směs syté páry a syté kapaliny. Je to stejnorodá směs jemných kapiček syté vody a syté páry, nebo jsou obě skupenství oddělená.

Sytá pára – pára je v termodynamické rovnováze se svou kapalinou. Teplota syté páry je shodná s teplotou syté kapaliny a je rovna *bodu varu* dané látky při daném tlaku.

Přivádí-li se dále teplo, stoupá teplota syté páry a až se přemění veškerá kapalina na páru, vznikne **přehřátá pára**. Přehřátá pára má teplotu vyšší než je bod varu.

Pro každou kapalinu pak existují termodynamické p - V , T - s diagramy těchto technologických stavů, které se využívají např. při zkapalňování plynů, nebo pro distribuci tepla při CZT.

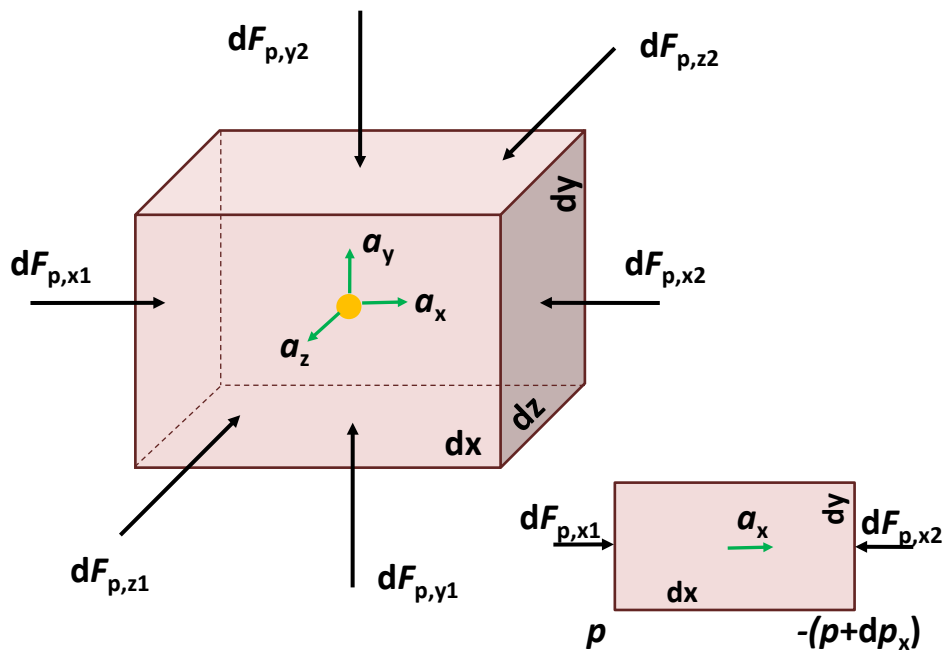
3.2. Základní rovnice hydromechaniky

Hydrostatika se zabývá rovnováhou sil působících na tekutinu v klidu. Tato rovnováha nastane tehdy, když se částice vůči sobě nepohybují, to znamená, že tvar objemu tekutiny se nemění. Síly, které mohou působit na tekutinu, jsou *síly hmotnostní* a *tlakové*.

Hydrodynamika pak popisuje tekutiny v pohybu a kromě sil hmotnostních a tlakových jsou zde navíc *síly třecí* F_t a *síly setrvačné* F_s .

Eulerova rovnice hydrostatiky vyjadřuje podmínku rovnováhy sil působících na tekutinu v klidu. Na kapalinu působí hmotnostní síly F_m a tlakové síly F_p . Obě síly musí být v rovnováze:

$$F_m + F_p = 0$$



Obr. KON05 K odvození Eulerovy rovnice hydrostatiky.

Na obr. KON05 je znázorněn elementární objem ve tvaru hranolku o stranách dx , dy , dz , rovnoběžných se zvolenými osami x , y , z . Tlakové síly působí na povrch hranolku ve třech kolmých směrech. Protože plošky jsou velmi malé, je možné tlak považovat za konstantní. Na plošku $dy \cdot dz$ působí tlaková síla ve směru osy x a je označena $dF_{p,x}$. Analogicky pro ostatní směry: $dF_{p,y}$ pro $dx \cdot dz$; $dF_{p,z}$ pro $dx \cdot dy$. Protože všechny síly působící na hranolek procházejí jedním bodem (těžištěm) jsou splněny momentové podmínky.

Ve směru osy x působí na zvolený hranolek plošné síly $dF_{p,x1}$ a $dF_{p,x2}$ na dvě plošky $dy \cdot dz$, jejichž normály jsou rovnoběžné s osou x . Tlaková síla na levou plošku (dS_{x1}) je určena velikostí plošky $dy \cdot dz$ a tlakem p a platí vztah

$$dF_{p,x1} = p \cdot dydz$$

Na pravou plošku $dy \cdot dz$, která je vzdálena od levé plošky o délku dx , působí tlak $p + dp_x$, neboť obecně je tlak funkcí polohy a tlaková síla na pravou plošku je určena vztahem

$$dF_{p,x2} = (p + dp_x) \cdot dydz$$

Tlak $dF_{p,x2}$ působí opačným směrem, než je kladný smysl osy x a proto výslednice uvedených tlakových sil je

$$dF_{p,x} = dF_{p,x1} + dF_{p,x2}$$

Kromě tlakových sil působí na elementární objem (hranolek) ještě hmotnostní síly. Její složka ve směru osy x je dána vztahem

$$dF_{m,x} = dm \cdot a_x$$

kde dm je hmotnost hranolku kapaliny a a_x je zrychlení (hmotnostní síla na jednotku hmoty) ve směru osy x. Hmotnost lze vyjádřit pomocí objemu hranolku $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot dx dy dz$.

Pak hmotnostní síla ve směru osy x je

$$dF_{m,x} = \rho \cdot a_x \cdot dx dy dz$$

Pro rovnováhu sil pak platí

$$dF_{p,x} + dF_{m,x} = 0$$

$$dF_{p,x1} - dF_{p,x2} + dF_{m,x} = 0$$

$$p \cdot dy dz - (p + dp_x) dy dz + \rho \cdot a_x \cdot dx dy dz = 0$$

$$\rho \cdot a_x \cdot dx - dp_x = 0$$

Protože tlak kapaliny je funkcí polohy, platí $p = p(x, y, z)$ a přírůstek tlaku je

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz$$

Pravá strana této rovnice udává změnu tlaku při diferenciální změně příslušných souřadnic.

Její fyzikální význam je tedy přírůstek tlaku při posunutí ve směru osy x, tedy $dp_x = \frac{\partial p}{\partial x} dx$.

Podobně je tomu i v ostatních směrech. Pomocí posledních vztahů lze dále rovnici pro rovnováhu sil upravit dosazením za dp_x :

$$\rho \cdot a_x \cdot dx - \frac{\partial p}{\partial x} dx = 0$$

$$a_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Poslední výraz je konečným výrazem hledané podmínky rovnováhy sil. Analogicky lze pak pro ostatní směry napsat:

$$a_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$a_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Tyto tři rovnice vyjadřují **Eulerovu rovnici hydrostatiky**. Jestliže rovnice vektorově napíšeme a sečteme, dostaneme jednu rovnici

$$\vec{a} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0$$

Eulerova rovnice hydrostatiky je základní rovnicí k určení tlaků v kapalině a tlakových sil.

Pro hydrodynamiku, tedy pro proudění dokonalé tekutiny, jsou platné zákony rovnováhy sil, zákony zachování hmotnosti a energie. Pro dokonalou tekutinu platí následující rovnice:

- *rovnice kontinuity*, která vyjadřuje, že v jedné a téže proudové trubici se nemění celková hmotnost protékající tekutiny. Tyto rovnice platí i pro proudění skutečné tekutiny.
- *Eulerova rovnice hydrodynamiky*, vyjadřuje rovnováhu sil tlakových, hmotnostních a setrvačných,
- *Bernoulliho rovnice*, vyjadřuje rovnováhu sil tlakových, hmotnostních a setrvačných neboli energie tlakové, potenciální a kinetické.

Pro proudění skutečné tekutiny, tedy tekutiny s vnitřním třením, pak platí *Navierova – Stokesova rovnice*, jenž vyjadřuje rovnováhu sil tlakových, hmotnostních, setrvačných a třecích.

Rovnice kontinuity. Při proudění se může měnit hmotnost tekutiny. Vytkneme-li si libovolný objem tekutiny, lze sledovat změnu hmotnosti viz obr. **KON06**. Do zvoleného objemu může přitéci více tekutiny, než z něj odtéká, čímž se musí hmotnost zvětšit. Může to platit i v opačném případě. Může nastat však případ, kdy přitéká i odtéká stejná hmotnost tekutiny.

Představíme si elementární objem (hranol) o stranách dx , dy a dz . Tímto hranolem protéká tekutina určitou rychlostí ve třech směrech (osy x , y , z), která je kolmá na elementární plošky

hranolu. Rychlost průtoku elementárními ploškami můžeme považovat za konstantní (kontrolní objem je velmi malý).

Plocha hranolku, jímž do elementárního objemu vtéká tekutiny je ve směru osy x , je označena dS_x . Tekutina vtéká do hranolku z levé strany rychlostí v_x a vytéká rychlostí $v_x + dv_x$.

Do elementárního objemu za čas $d\tau$ přiteče ve směru osy x hmotnost tekutiny

$$\rho \cdot v_x \cdot dS_x \cdot d\tau,$$

a vyteče

$$\rho \cdot v_x \cdot dS_x \cdot d\tau + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x \cdot dS_x \cdot d\tau) \cdot dx$$

Rozdíl přiteklé a vyteklé hmotnosti tekutiny do elementárního objemu ve směru osy x je

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot v_x \cdot dS_x \cdot d\tau) \cdot dx = \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot dV \cdot d\tau,$$

což platí za předpokladu, že průřez dS_x nezávisí na souřadnici x . Pravé strany lze přepsat analogicky pro jednotlivé směry y a z . Celkový rozdíl přiteklé a odteklé hmotnosti tekutiny je dán součtem výrazů:

$$\frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot dV \cdot d\tau + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} \cdot dV \cdot d\tau + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \cdot dV \cdot d\tau$$

Hmotnost tekutiny $dm = \rho \cdot dV$ v elementárním objemu se za čas $d\tau$ změní

$$\frac{\partial(dm)}{\partial \tau} \cdot d\tau = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \cdot dV \cdot d\tau$$

Protože se hmotnost nemění $m = \text{konst.}$ musí být celková změna nulová, takže po krácení výrazem $dVd\tau$ má rovnice následující tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = 0, \text{ resp. } \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \text{div}(\rho \cdot v) = 0$$

Toto je **obecná rovnice kontinuity** pro neustálené proudění stlačitelné tekutiny v prostoru.

Poznámka:

Pro divergenci v tomto výrazu můžeme napsat

$$\operatorname{div}(\rho \cdot v) = \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \rho \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

A platí, že úplná derivace hustoty podle času je

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z$$

Můžeme po dosazení posledních dvou rovnic do rovnice kontinuity $\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\rho \cdot v) = 0$ obdržet

výraz

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

Tímto (analogickým) výrazem dostaneme druhý tvar pro **rovnici kontinuity** pro prostorové a rovinné proudění

$$\frac{d\rho}{d\tau} + \rho \cdot \operatorname{div} v = 0$$

Pro ustálené proudění (stlačitelné a nestlačitelné tekutiny) v prostoru platí tato rovnice kontinuity

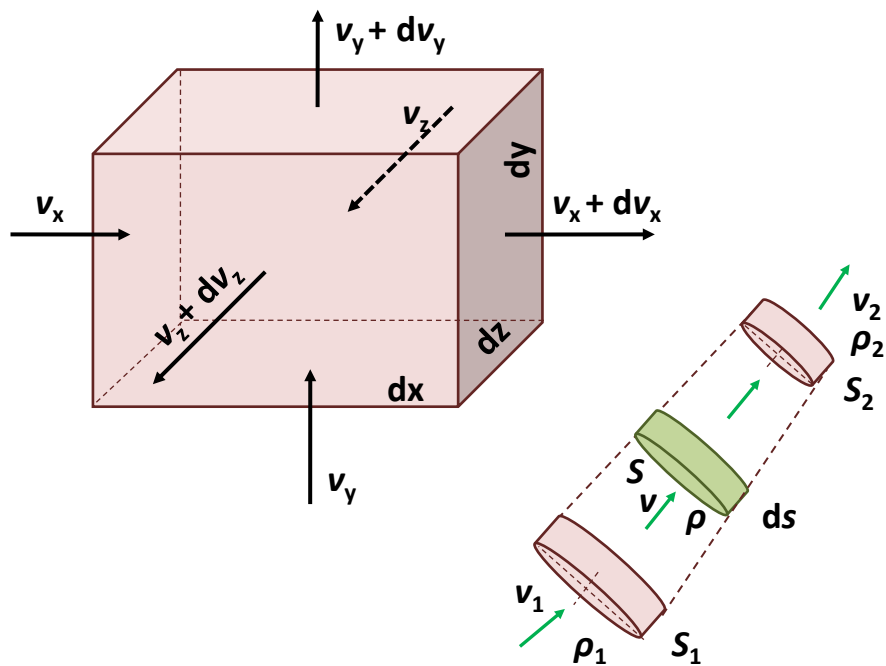
$$\operatorname{div}(\rho \cdot v) = 0$$

Pro nestlačitelné kapaliny, za předpokladu $\rho = \text{konst.}$ pak rovnice kontinuity má tvar

$$\operatorname{div} v = 0,$$

kteřá rovněž platí i pro neustálené proudění nestlačitelné tekutiny v prostoru.

Všechny tyto rovnice byly odvozeny za předpokladu, že elementární objem se nemění. To v technické praxi není běžné. Na obrázku **KON06** je patrný proměnný průřez proudové trubice.



Obr. KON06 K odvození rovnice kontinuity.

Elementární objem je ve formě válečku. Rozdíl přitéklé a vytekuté tekutiny z elementárního objemu je dle dřívějších výrazů $\frac{\partial}{\partial s}(\rho \cdot v \cdot S \cdot d\tau)ds$. Změna hmotnosti v elementárním objemu

o průřezu S je $\frac{\partial}{\partial \tau}(v \cdot S \cdot ds)d\tau$.

Celková změna hmotnosti musí být nulová, (diferenciály ds a $d\tau$ jsou nezávislé, vytkneme ds a $d\tau$), pak platí:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho \cdot v \cdot S)d\tau ds + \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho \cdot S)ds d\tau = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho \cdot v \cdot S) + \frac{\partial}{\partial \tau}(\rho \cdot S) = 0$$

Tato rovnice je **rovnice kontinuity** pro neustálené jednorozměrné proudění stlačitelné tekutiny proudovou trubicí s proměnným průřezem a to i v závislosti na čase.

Nemění-li se průřez proudové trubice v čase, pak rovnice kontinuity má tento tvar

$$\frac{\partial(\rho \cdot S \cdot v)}{\partial s} + S \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0$$

Pro ustálené proudění nabývá rovnice kontinuity konečný tvar (za předpokladu, že

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial(\rho \cdot S \cdot v)}{\partial s} = 0)$$

$$\rho \cdot S \cdot v = \text{konst.} = Q_m,$$

kde Q_m je hmotnostní průtok tekutiny ($\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$). V každém průřezu proudové trubice je součin hustoty, rychlosti a průtočného průřezu konstantní a rovná se hmotnostnímu průtoku tekutiny.

Pro nestlačitelné tekutiny, kdy je hustota konstantní, platí jednoduchý tvar

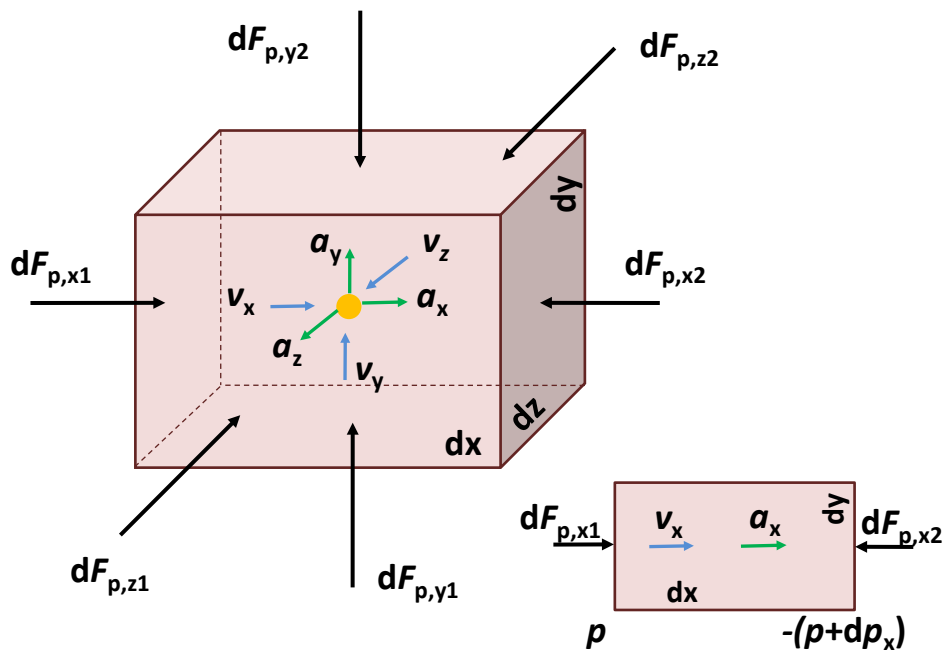
$$S \cdot v = \text{konst.} = Q_v,$$

kde Q_v je objemový průtok, jednotkou je $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

Eulerova rovnice hydrodynamiky. Eulerova pohybová rovnice vyjadřuje rovnováhu sil hmotnostních, tlakových a setrvačných při proudění ideální tekutiny, to znamená, že nemá vnitřní tření. Rovnice rovnováhy sil pak je následující

$$F_m + F_p = F_s$$

Pro odvození Eulerovy pohybové rovnice vybereme elementární objem tvaru hranolu o stranách dx , dy , dz (viz obr. **KON07**).



Obr. KON07. K odvození Eulerovy pohybové rovnice.

Na tento elementární objem působí tlaková síla F_p a hmotnostní síla F_m , výslednicí těchto sil je síla setrvačná F_s . Rovnováhu lze napsat pro všechny tři směry. Ve směru osy x pak tlaková síla je určena

$$dF_{p,x} = dF_{p,x1} - dF_{p,x2} = p \cdot dy \cdot dz - (p + dp_x) dy \cdot dz = -dp_x \cdot dy \cdot dz$$

a hmotnostní síla

$$dF_{m,x} = a_x \cdot \rho \cdot dV = a_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Setrvačná síla pohybující se tekutiny je

$$dF_{s,x} = dm \cdot \frac{dv_x}{d\tau} = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dv_x}{d\tau}$$

Pro uvedené síly musí být splněna podmínka rovnováhy

$$dF_{p,x} + dF_{m,x} = dF_{s,x}$$

$$-dp_x \cdot dy \cdot dz + \rho \cdot a_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dv_x}{d\tau}$$

$$\text{a platí } dp_x = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx$$

Pak po úpravě je rovnováha sil tekutiny v pohybu rovna

$$a_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dv_x}{d\tau}$$

a analogicky pro ostatní osy

$$a_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dv_y}{d\tau}$$

$$a_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dv_z}{d\tau}$$

Eulerova rovnice hydrodynamiky slouží k odvození Bernoulliho rovnice, jak bude ukázáno následovně.

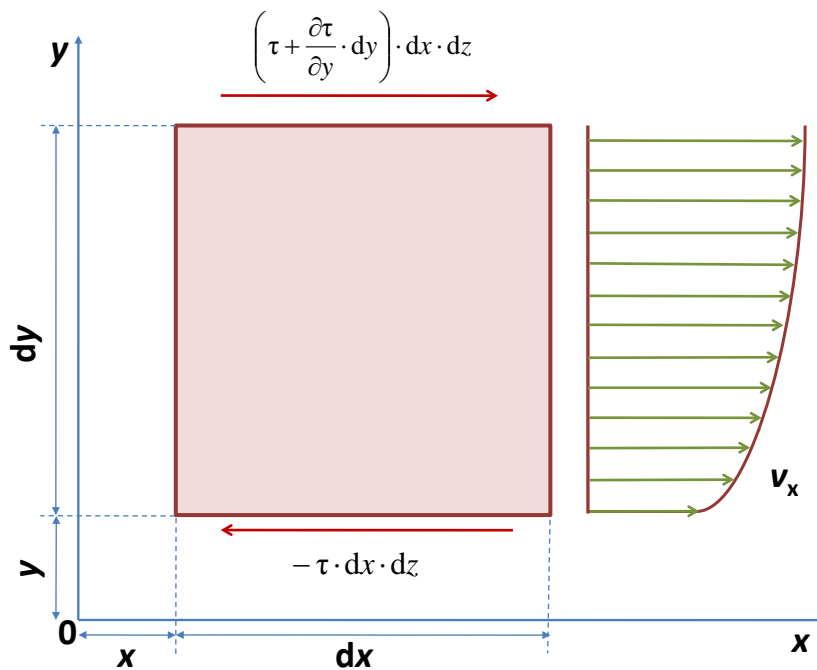
Navierova – Stokesova rovnice. Tato rovnice vyjadřuje rovnováhu sil hmotnostních F_m , tlakových F_p , třecích F_t a setrvačných F_s

$$dF_p + dF_m + dF_t = dF_s$$

Z uvedené rovnice je vidět, že na rozdíl od Eulerovy pohybové rovnice přibyla třecí síla, jež vyvolává tření mezi vrstvami pohybující se tekutiny. Pro vyvolané tečné (smykové) napětí τ platí Newtonův vztah – tečné napětí je úměrné rychlostnímu gradientu, tedy

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy} = \nu \cdot \rho \cdot \frac{dv}{dy}$$

Třecí síla, která se projevuje při proudění skutečné tekutiny, je znázorněna na elementárním objemu průmětem stěny $dx dy$, jak je patrné z obr. **KON08**.



Obr. KON08 K odvození Navierovy – Stokesovy rovnice.

Z obrázku lze odvodit, že rychlost tekutiny v_x roste ve směru osy y . Tečné napětí τ působí proti směru rychlosti, tedy proti pohybu částic, a ty jsou tedy přibrzdovány. Ve vzdálenosti y (spodní stěna) pak třecí síla je

$$-\tau \cdot dx \cdot dz$$

Ve vzdálenosti $y + dy$ je rychlost proudících částic podél horní stěny větší, pak třecí síla je rovna

$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz$$

a působí ve směru pohybu tekutiny a tyto jsou urychlovány.

Výslednice třecích sil podél horní a spodní stěny elementárního objemu se stanoví jejich součtem

$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz - \tau \cdot dx \cdot dz = \frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

Pravá strana rovnice se upravím tak, že výslednici třecích sil ve směru osy x se vztáhne na jednotku hmotnosti $\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$ a za tečné napětí ve směru osy x se dosadí známý Newtonův vztah. Rovnice má pak následující tvar

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} \cdot \frac{dx \cdot dy \cdot dz}{\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz} = \nu \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$$

Navierova – Stokesova rovnice vychází z Eulerovy rovnice hydrodynamiky, rozšířené o výslednici třecích sil. Rovnice pro proudění skutečné tekutiny pro směry x , y , z pak mají tvar

$$a_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = \left(\frac{dv_x}{d\tau} \right)$$

$$a_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right) = \left(\frac{dv_y}{d\tau} \right)$$

$$a_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) = \left(\frac{dv_z}{d\tau} \right)$$

Bernoulliho rovnice vyjadřuje zákon zachování energie a platí jak pro tekutinu skutečnou, tak ideální.

Pro ideální tekutinu se odvozuje z Eulerovy rovnice hydrodynamiky pro ustálené proudění,

kdy složky rychlosti se v čase nemění, tedy $\frac{\partial v_x}{\partial \tau} = \frac{\partial v_y}{\partial \tau} = \frac{\partial v_z}{\partial \tau} = 0$, ale mění se pouze ve směru

odpovídajících os

$$a_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x}$$

$$a_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad \left. \vphantom{a_y} \right\} \text{sečtením těchto tří rovnic a matematickou úpravou získáme výraz}$$

$$a_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$a_x \cdot dx + a_y \cdot dy + a_z \cdot dz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right) = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dy + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot dz$$

Působí-li na tekutinu pouze zemské tíhové zrychlení, je zrychlením ve směru osy y rovno $a_y = -g$ (znaménko mínus je zde proto, protože kladný smysl osy y , je opačný než smysl tíhového zrychlení). Zrychlení ve směru os x a z je $a_x = a_z = 0$. Rovnice pak, na základě těchto podmínek, přechází na tvar

$$g \cdot dy + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right) + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dx + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot dz = 0$$

Platí-li, že $v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx = d\left(\frac{v_x^2}{2}\right)$, pak rovnici lze psát následovně

$$g \cdot \rho \cdot dy + dp + \rho \cdot d\frac{v^2}{2} = 0$$

Integrováním tohoto výrazu získáme **Bernoulliho rovnici pro ideální tekutinu** ve tvaru součtů tlaků, tedy

$$h \cdot g \cdot \rho + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} = \text{konst.}, \text{ neboli } \textit{tlak geometrický} + \textit{tlak statický} + \textit{tlak dynamický}.$$

a

$$h + \frac{p}{g \cdot \rho} + \frac{v^2}{2 \cdot g} = \text{konst.}, \text{ neboli } \textit{geometrická výška} + \textit{tlaková výška} + \textit{dynamická výška},$$

neboli $\textit{polohová výška} + \textit{statická výška} + \textit{rychlostní výška}.$

Zákon zachování energie je pak dán úpravou rovnic pro tlaky a výšky, tedy:

$$(m) \cdot g \cdot h + \frac{(m) \cdot p}{\rho} + \frac{(m) \cdot v^2}{2} = \text{konst.}, \text{ neboli } \textit{energie tekutiny polohová} + \textit{tlaková} + \textit{kinetická}.$$

Součet těchto energií je celková mechanická energie tekutiny. Bernoulliho rovnici lze napsat rovněž pro dva průřezy (1 a 2) téže proudové trubice, tedy

$$h_1 \cdot g \cdot \rho + p_1 + \frac{v_1^2 \cdot \rho}{2} + h_2 \cdot g \cdot \rho + p_2 + \frac{v_2^2 \cdot \rho}{2} = \text{konst.}$$

Pro skutečnou tekutinu je Bernoulliho rovnice rozšířena o tlakovou ztrátu p_z (pro tlaky) a ztrátovou výšku h_z (pro výšky).

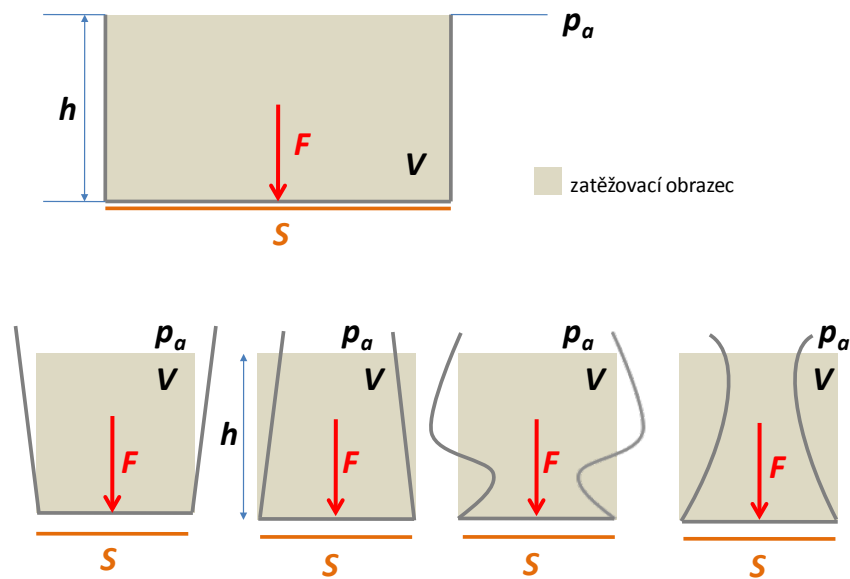
3.3. Statika tekutin

Z odvozování rovnic hydrodynamiky víme, že na tekutinu působí různé síly. V případě tekutiny, která je v klidu jsou uvažovány síly hmotnostní a tlakové. Jestliže hmotnostní síly jsou zanedbatelně malé vůči silám tlakovým ($F_m \ll F_p$), zjednoduší se Eulerova rovnice hydrostatiky na výraz $\text{grad } p = 0$. Což znamená, že ve všech místech tekutiny je tlak konstantní – **Pascalův zákon**. Tento zákon platí pouze v případě, že hmotnostní síly jsou zanedbatelné vůči tlakovým silám. Využití Pascalova zákona je například u hydraulického lisu.

Tlak na dno nádoby. Má-li nádoba *vodorovné dno*, je na dně nádoby tlak $p = h \cdot g \cdot \rho$. Tlak je rovnoměrně rozložen po celé ploše a působí kolmo na plochu. Síla působící na dno nádoby $F = h \cdot g \cdot \rho \cdot S$. Součin výšky h a plochy S je objem kapaliny V . Těleso o objemu V představuje *zatěžovací obrazec* (obr. KON09), který je omezen těmito plochami:

- a) plochou S , na níž působí síla F ,
- b) tlakovou hladinou tlaku atmosférického (tlak ovzduší) $p_a = \text{konst.}$,
- c) pláštěm vzniklým opsáním rovnoběžné přímky s výslednicí tlaku F nad obrysem plochy S .

Jestliže nádoba má boční stěny jiné než svislé, je výsledná síla F na dno nádoby dána stejným výrazem, nebo výška h se nemění, tento jev se nazývá **hydrostatické paradoxon**.



Obr. KON09 K objasnění hydrostatického paradoxon.

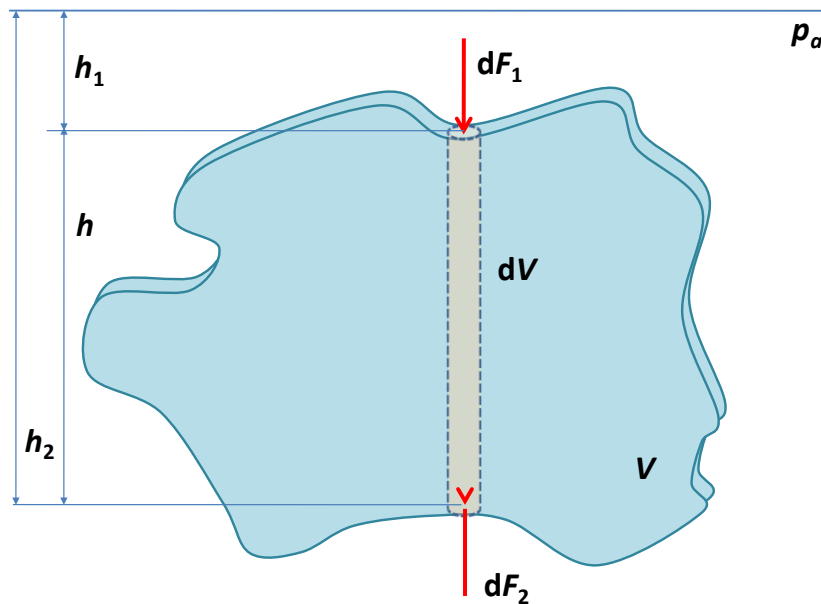
Při určování tlaku na *šikmé a zakřivené plochy* je určení složitější a přesahuje rámec těchto skript. Blíže se čtenář může s tímto tématem seznámit v učebnicích/skriptech hydromechaniky.

Tlak na tělesa ponořená do kapaliny. Na těleso ponořené do kapaliny působí síly ve třech kolmých směrech (jeden svislý směr a dva vodorovné směry). Výslednice vodorovných tlakových sil na těleso bude stejně velká, stejného směru, ale opačného smyslu, takže se tuhostí tělesa ruší.

Ve svislém směru budou na těleso (elementární objem dV ve tvaru válečku, se základnou dS_y) působit dvě svislé složky tlakové síly dF_1 a dF_2 . Výslednicí obou sil je (obr. KON10)

$$dF_y = dF_1 = dF_2 = (h_2 - h_1) \cdot g \cdot \rho \cdot dS_y = h \cdot g \cdot \rho \cdot dS_y = g \cdot \rho \cdot dV = dG$$

Lze říci, že tlaková síla kapaliny ve svislém směru na elementární objem dV se rovná tíze kapaliny, která je tímto elementem vytlačena. Výsledkem je **Archimédův zákon**: „Na těleso ponořené do kapaliny působí vztlaková síla rovna tíze kapaliny tělesem vytlačené.“ Na těleso ponořené do kapaliny tedy působí dvě síly: síla vztlaková F_V v těžišti objemu vytlačené kapaliny a vlastní tíha tělesa G , působící v těžišti tělesa. Mohou nastat tři případy vzájemného působení obou sil:



Obr. KON10. K objasnění Archimédova zákona

$F_v < G$... tíha tělesa je větší než vztlaková síla, výslednice sil působí ve svislém směru dolů a těleso klesá ke dnu,

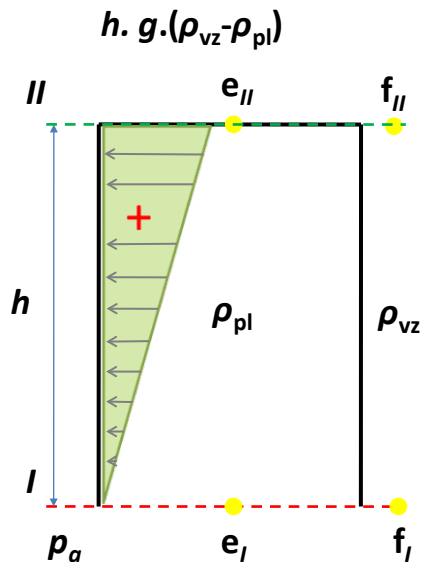
$F_v = G$... tíha tělesa a vztlaková síla jsou v rovnováze, výslednice je nulová a těleso setrvává v libovolné poloze – těleso se vznáší.

$F_v > G$... tíha tělesa je menší než vztlaková síla, výslednice působí svisle nahoru a těleso vznáší k hladině. Vynořením tělesa se zmenší vztlaková síla, až nastane rovnováha s vlastní tíhou tělesa, těleso plave.

Dva plyny různých vlastností v klidu. Statika dvou plynů odlišných vlastností (rozdílné hustoty, hustota plynu < hustota vzduchu) bude vyšetřována, v případě, kdy plyn je v nádobě, která je *otevřená zdola* (Obr. KON11) a *otevřená shora* (Obr. KON12). Pro oba případy platí, že v rovině, kde je nádoba otevřena, je tlak určen pouze atmosférickým tlakem p_a , to znamená, že jak v nádobě, tak i v okolním vzduchu je tlak stejný. V rovině, kde je nádoba

uzavřena, je tlak v nádobě a ve vzduchu rozdílný, neboť kromě atmosférického tlaku je ovlivněn ještě tlakem geometrickým.

Nádoba otevřená zdola



Obr. KON11 K popisu výsledného tlaku pro nádobu otevřenou zdola

V rovině **I-I**, v místech e_I a f_I je tlak roven tlaku atmosférickému:

$$p_{e,I} = p_{f,I} = p_a$$

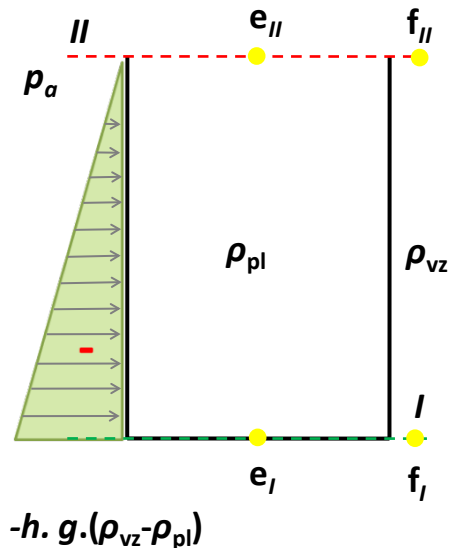
V rovině **II-II**, v místech e_{II} a f_{II} jsou tlaky různé

$$p_{e,II} = p_a - h \cdot g \cdot \rho_{pl}$$

$$p_{f,II} = p_a - h \cdot g \cdot \rho_{vz}$$

V rovině **II-II**, rozdíl geometrického tlaku plynu uvnitř nádoby a geometrického tlaku okolního vzduchu působí na stěnu nádoby. Výsledný geometrický tlak má *kladnou*

Nádoba otevřená shora



Obr. KON12 K popisu výsledného tlaku pro nádobu otevřenou shora

V rovině **II-II**, v místech e_{II} a f_{II} je tlak roven tlaku atmosférickému:

$$p_{e,II} = p_{f,II} = p_a$$

V rovině **I-I**, v místech e_I a f_I jsou tlaky různé

$$p_{e,I} = p_a + h \cdot g \cdot \rho_{pl}$$

$$p_{f,I} = p_a + h \cdot g \cdot \rho_{vz}$$

Za předpokladu, že plyn nestačí z nádoby uniknout (díky jeho menší hustotě, než vzduch), pak **výsledný geometrický tlak** má *zápornou* hodnotu, tedy

hodnotu, neboť $\rho_{pl} < \rho_{vz}$. **Výsledný geometrický tlak**

$$p_g = p_{e,II} - p_{f,II} = h \cdot g \cdot (\rho_{vz} - \rho_{pl})$$

Z obr. **KON11** je patrné, že tlak působící na stěnu zevnitř nádoby má maximální hodnotu v rovině *II-II* a nulovou hodnotu v rovině *I-I*. Na stěnu nádoby působí ze strany ze strany plynu **přetlak**, jehož velikost je přímo úměrná výšce h a rozdílu hustot $(\rho_{vz} - \rho_{pl})$.

$$p_g = p_{e,I} - p_{f,I} = -h \cdot g \cdot (\rho_{vz} - \rho_{pl})$$

Z obr. **KON12** je patrné, že maximální hodnota bude v rovině *I-I* a nulová hodnota v rovině *II-II*. Což v nádobě způsobí **podtlak**.

Aplikací tohoto případu je vzájemné působení spalin a vzduchu v *komíně*, z čehož vyplývá, že čím vyšší bude komín, tím vyšší bude vyvozený podtlak na patě komína.

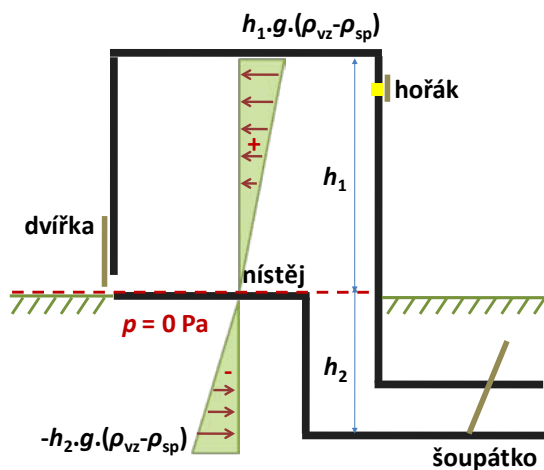
Jako příklad využití statiky dvou plynů si můžeme uvést statiku plynů v pracovním prostoru pece, jak je vidět na obrázku **KON12a**. Pec je složena z „horní“ části, kde jsou umístěny hořáky pro spalování paliva, samotný pracovní prostor pece, kde probíhá spalování paliva a zároveň jsou zde přítomny spaliny, dále dvířka pece pro sázení materiálu pro ohřev. Po určité době spaliny vyplní pracovní prostor pece a odcházejí „spodní“ částí pece do spalinového traktu. Spalinový trakt (spolu se šoupátkem) se nachází pod úrovní nístěje pece. Z popsané situace jde říci, že se jedná o statiku dvou plynů rozdílných vlastností, neboť se jedná o vzájemné působení horkých spalin v pecním prostoru a okolního atmosférického vzduchu.

Budeme celkem uvažovat tři stavy, které nastanou v peci.

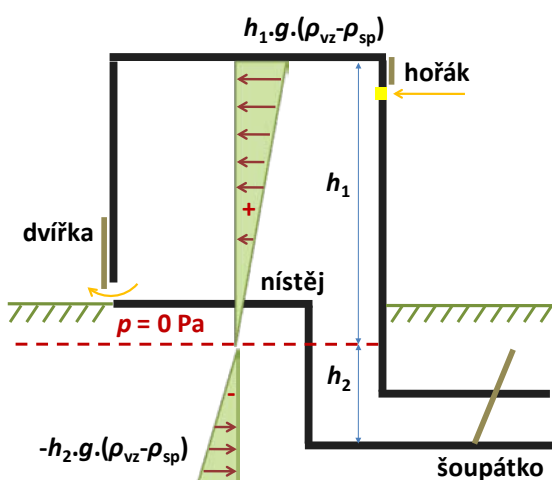
1. situace. Šoupátko a hořák jsou zavřeny, pecní dvířka pootevřena. Vlivem pootevřených dvířek se utvoří tlaková rovnováha na úrovni nístěje, při které je tlak spalin roven tlaku atmosférickému. Při této nulové tlakové hladině na úrovni nístěje nenastane vyšlehávání spalin ani nasávání falešného vzduchu otvorem pod pootevřenými pecními dvířky. Nad úrovní nulové tlakové hladiny se projevuje přetlak, který je vyvolán rozdílem hustot okolního vzduchu a horkých spalin. Průběh přetlaku je dán geometrickým tlakem a nejvyšší hodnotu dosáhne pod klenbou pece (tj. nádoba otevřená zdola). Pod úrovní nulové tlakové hladiny je tlak horkých spalin v kanálu nižší než atmosférický tlak, takže se vytváří podtlak (tj. nádoba otevřená shora). Největší hodnotu má tlak u dna kanálu.

2. Situace. Zapálení paliva v hořáku, zvýší se množství (objem) a tlak horkých spalin v pracovním prostoru pece a poklesne nulová tlaková hladina pod úroveň nístěje. Nastane vyšlehávání spalin otvorem pod nadzvednutými dvířky.
3. Situace. Komín vyvolává podtlak a ovlivňuje nulovou tlakovou hladinu. Podtlak vyvolaný komínem regulujeme pomocí šoupátka umístěného v odtahovém traktu. Postupným otvíráním šoupátka se nulová tlaková hladina zvedá nahoru k nístěji. Musíme však zamezit, aby se nulová tlaková hladina zvedla nad nístěj pece a do prostoru pece by se, skrze pootevřená dvířka, začal nasávat falešný vzduch z okolní atmosféry.

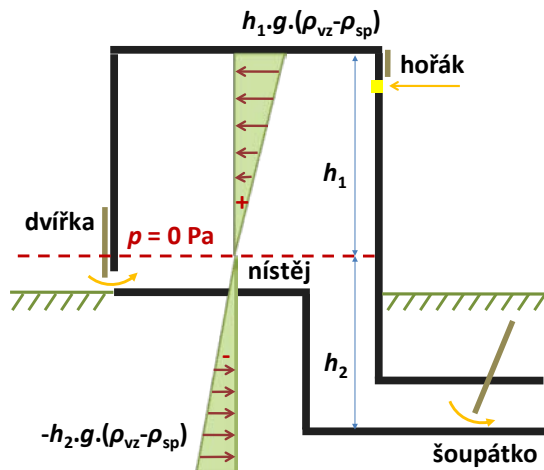
1. situace



2. situace



3. situace



Obr. KON12a. Statika plynů v pracovním prostoru pece.

Vyšlehávání plamene, resp. vyšlehávání spalin, které je vyvolané přetlakem, zvyšuje spotřebu tepla v pracovním prostoru pece a snižuje životnost pece (pecní dvířka a jejich okolí, kolem kterých spaliny proudí). Nasávání falešného vzduchu, které je vyvolané přetlakem, pak snižuje teplotu v pracovním prostoru pece, zvyšuje se objem spalin.

3.4. Dynamika tekutin

Hydrodynamika se zabývá prouděním tekutiny a stanovuje vzájemné závislosti mezi pohybem tekutiny a časem (kinematika) a rovněž i vzájemné působení sil v proudící tekutině (dynamika).

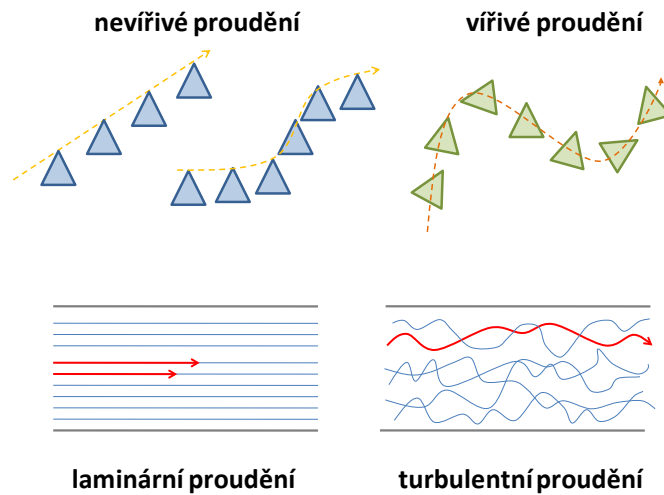
Proudění tekutin lze rozdělit podle několika hledisek (obr. KON13):

A) Podle fyzikálních vlastností tekutin.

1. *Proudění ideální tekutiny* – nevířivé proudění – částice se pohybují přímočaře nebo křivočaře tak, že vůči pozorovateli se neotáčejí kolem vlastní osy. Vířivé proudění – částice se vůči pozorovateli natáčejí kolem vlastních os.
2. *Proudění skutečných tekutin* – laminární proudění – částice se pohybují ve vrstvách (deskách), aniž se přemísťují po průřezu. Turbulentní proudění – částice mají kromě střední (postupné) rychlosti ještě rychlost flukтуаční (turbulentní), již se přemísťují po průřezu.

B) Podle kinematických hledisek.

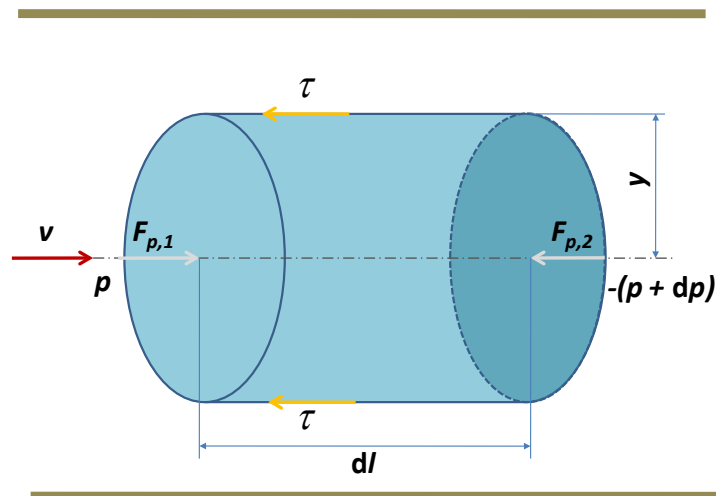
1. Podle geometrického uspořádání proudu na třírozměrné (prostorové) 3D proudění, dvourozměrné (rovinné) 2D, jednorozměrné proudění (např. proudění po křivce).
2. Podle závislosti na čase. Proudění stacionární (ustálené), které je nezávislé na čase a proudění nestacionární (neustálené), které je závislé na čase.



Obr. KON13 Typy proudění.

Laminární proudění. Při laminárním proudění skutečné tekutiny se předpokládá, že nekonečně tenké vrstvy tekutiny klouzají jedna po druhé, takže se pohybují ve vrstvách. Tekutina má viskozitu, která se projevuje tak, že sousední částice tekutiny na sebe působí třecí silou. Na stěnách potrubí, ve kterém tekutina proudí, ulpívají částice tekutiny. Rychlost částic vzrůstá od stěn potrubí do osy potrubí (dovnitř proudu). Pokud je v trubce (s kruhovým průřezem) laminární proudění ustálené, pak setrvačná síla je nulová, hmotnostní síla je rovněž nulová (nepůsobí tíhové zrychlení, neboť trubka je uložena vodorovně). Na trubku (a její elementární objem – viz obr. KON14) bude působit, kromě třecí síly F_t , ještě síla tlaková F_p . Obě síly musí být v rovnováze. Rovnováha sil je dána rovnicí

$$F_p + F_t = 0$$



Obr. KON14 Laminární proudění v trubce

Výsledná tlaková síla F_p je dána součtem sil

$$dF_p = F_{p,1} + F_{p,2} = p \cdot \pi \cdot y^2 + [-(p + dp) \cdot \pi \cdot y^2] = [p - (p + dp)] \pi \cdot y^2$$

Třecí síla působící na elementární objem

$$dF_t = -\tau \cdot 2 \cdot \pi \cdot y \cdot dl$$

Z rovnováhy sil pak pro tečné napětí plyne výraz

$$\tau = -\frac{y}{2} \cdot \frac{dp}{dl}$$

Tečné napětí τ se lineárně mění s poloměrem trubky y . V ose potrubí je hodnota $\tau = 0$, na stěně potrubí je hodnota $\tau = \max$. (Viz obr. KON15).

Za tečné napětí v rovnici dosadíme známý Newtonův vztah a získáme diferenciální rovnici průběhu rychlostního profilu

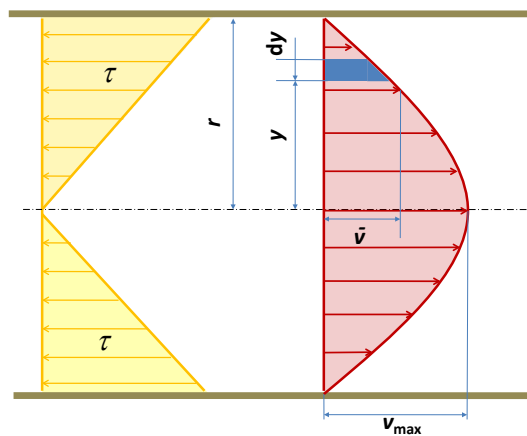
$$dv = -\frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{dp}{dl} \cdot y \cdot dy \dots \text{ po matematických úpravách je rychlost proudění dána rovnicí}$$

$$v = \frac{1}{4 \cdot \eta} \cdot \frac{dp}{dl} (r^2 - y^2)$$

Maximální rychlost tekutiny bude v ose potrubí $y = 0$

$$v_{\max} = \frac{r^2}{4 \cdot \eta} \cdot \frac{dp}{dl} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

Rychlostní profil v rovině řezu trubky je parabola, v prostoru je to rotační paraboloid, jak je znázorněno na obr. KON15.



Obr. KON15 Průběh tečného napětí a rychlosti u laminárního proudění.

Objemový průtok potrubím se určí integrací elementárního průtoku tekutiny $dQ_V = v \cdot 2 \cdot \pi \cdot y \cdot dy$, který protéká elementárním mezikružím šířky dy a poloměru y s tlakovým rozdílem dp na délce dl

$$Q_V = \int_0^r v \cdot 2 \cdot \pi \cdot y \cdot dy = \frac{\pi}{2 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \int_0^r (r^2 - y^2) \cdot y \cdot dy = \frac{\pi \cdot r^4}{8 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \quad (\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1})$$

Tento výraz je vyjádřením **Hagenova – Poiseuilleova zákona** a platí jen pro laminární ustálené proudění.

Z objemového průtoku lze vypočítat průměrnou rychlost v porubí

$$\bar{v} = \frac{Q_V}{S} = \frac{r^2}{8 \cdot \eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} \text{ neboli } \bar{v} = \frac{v_{\max}}{2}$$

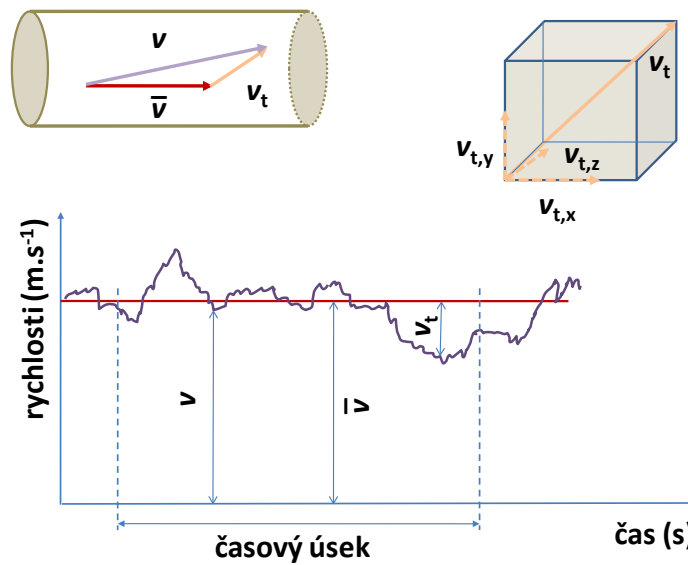
Rychlostní profil je ve všech průřezech trubky stejný, což nastává po určité dráze od počátku trubky. Tekutina po vstupu do trubky má rychlostní profil odpovídající dokonalé tekutině (všechny částice mají stejnou rychlost). Stykem tekutiny se stěnou trubky jsou částice brzděny a vznikají tak rozdíly v rychlostech částic právě v závislosti na viskozitě tekutiny. Postupně se rychlostní profil deformuje, až se ustálí a má v řezu tvar paraboly. Vzdálenost, na níž se vytváří rychlostní profil laminárního proudu, se nazývá *počáteční dráha laminárního proudu*. Délka této dráhy je závislá na Reynoldsově kritériu.

Turbulentní proudění. Při turbulentním proudění částice tekutiny mají větší rychlost, než při laminárním proudění. Dochází tak k pohybu částic tekutiny ve všech směrech. Částice následkem pohybů přecházejí z jedné vrstvy do druhé, přičemž dochází k výměně kinetické energie a rychlosti částic se po průřezu vyrovnávají (netvoří v řezu parabolu). Rychlostní profil se v řezu blíží obdélníku tím více, čím je větší rychlost proudění, tedy turbulentní proudění je také závislé na Reynoldsově kritériu.

Proudění tekutiny se její jako chaotické, mění se fyzikální vlastnosti látky (např. viskozita). Může mít charakter pulsů, vírů, shluky tekutiny, při kterých fyzikální děje (např. sdílení tepla, difúze apod.) mohou být silně ovlivněny a může dojít až ke ztrátám energie. Proudění tekutiny je charakterizováno rychlostí, ovšem určit rychlost turbulentního proudu není jednoduché. V každém okamžiku a místě může být rychlost různá. Okamžitá rychlost turbulentního proudu v je dána součtem rychlosti střední (časově vyhlazená rychlost) a flukтуаční rychlosti v_t (dána turbulencemi, pulsacemi, víry apod.)

$$v = \bar{v} + v_t \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}).$$

Graficky jsou rychlosti při turbulentním proudění znázorněny na obr. **KON16**. Turbulentní složku rychlosti lze rozdělit do tří směrů x , y , z . Střední rychlost se stanoví jako průměr okamžitých rychlostí za daný časový interval. Okamžitá rychlost může nabývat jak kladných, tak záporných hodnot (oscilovat).



Obr. KON16. K vysvětlení turbulentního proudění.

Reynoldsovo kritérium - Re . Reynoldsovo kritérium patří mezi základní kritéria při proudění tekutiny. Je to bezrozměrné číslo, které je dáno poměrem sil setrvačných a vazkých. Tyto síly mají největší vliv při proudění skutečných tekutin. Vyjádření Reynoldsova kritéria je dáno poměrem těchto sil

$$\frac{F_s}{F_t} = \frac{m \cdot a}{\tau \cdot S} = \frac{m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta \tau}}{\eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y} \cdot S} = \frac{Q_m \cdot \Delta v}{\eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y} \cdot S} = \frac{\rho \cdot S \cdot v \cdot \Delta v}{\eta \cdot \frac{\Delta v}{\Delta y} \cdot S} = \frac{\rho \cdot l^2 \cdot v^2}{\eta \cdot l \cdot v} = \frac{v \cdot l}{\frac{\eta}{\rho}} = \frac{v \cdot l}{\nu} = Re,$$

kde l je charakteristický rozměr, pro kruhové potrubí je dán průměrem d , pro nekruhová potrubí je dán výrazem d_h , neboli *hydraulickým průměrem* $d_h = \frac{4 \cdot S}{o}$, kde S je průtočný průřez zaplněný tekutinou a o je obvod zaplněné tekutiny.

Dle Reynoldsova kritéria, jeho číselné hodnoty, rozlišujeme zda-li se jedná o proudění laminární, nebo turbulentní. Pro laminární proudění platí $Re < 2300$, pro turbulentní $Re > 10\,000$. Oblast, kdy $Re = 2300$ až $10\,000$ se nazývá *oblastí přechodovou* a kritérium má tzv. *kritické hodnoty* a označuje se jako Re_{kr} .

3.5. Hydraulické ztráty

Hydraulické ztráty neboli hydraulické odpory, vznikají při proudění skutečných tekutin a jsou to ztráty tlaku obecně. Překonání hydraulického odporu při proudění tekutiny vyžaduje mechanickou energii, která se odebírá tekutině a tato mechanická energie se nevratně přemění v teplo. Z fyzikálního hlediska jde při překonání hydraulických odporů k nezvratné a nežádoucí přeměně mechanické energie v energii tepelnou, což se projevuje jako ztráta energie.

Ztráty třením jsou způsobeny třením tekutiny o stěnu potrubí, které vyvolává viskozita tekutiny, zvětšují se s rostoucí délkou potrubí. **Ztráty místní** vznikají všude tam, kde dochází ke změně geometrie (např. rozšíření a zúžení průřezu), nebo změně směru proudu (šoupátko). Při místních ztrátách dochází k víření tekutiny. **Ztráta vztlakem** je vyvolána geometrickým tlakem a určuje se u svislého potrubí, dle charakteru proudění tekutiny může být tato ztráta kladná (vztlaková síla působí proti proudění tekutiny, zvýšení tlakové ztráty), nebo záporná (proudění tekutiny je shodně s působením vztlakové síly, snížení tlakové ztráty).

Měřítkem hydraulických ztrát je tlaková ztráta p_z a ztrátová výška h_z , tedy

$$p_z = \xi \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} = h_z \cdot g \cdot \rho \quad (\text{Pa})$$

$$h_z = \xi \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (\text{m})$$

kde ξ je ztrátový součinitel, závislý na druhu ztrát.

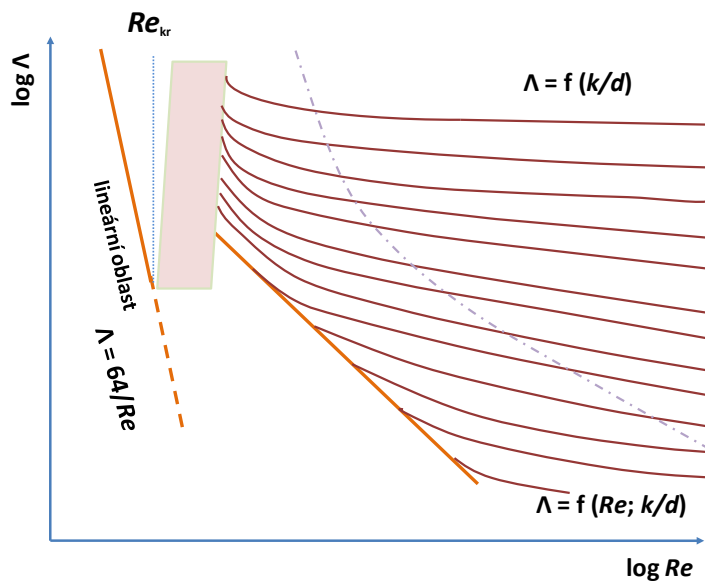
ZTRÁTY TŘENÍM. Ztráty třením jsou závislé na délce potrubí, drsnosti potrubí, na fyzikálních vlastnostech proudící tekutiny a na rychlosti tekutin. Všechny veličiny jsou zohledněny ve vztahu pro výpočet třecí ztráty

$$p_{z,tř} = \Lambda \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (\text{Pa}),$$

kde Λ je součinitel tření. *Součinitel tření* je závislý na rychlosti v , kinematické viskozitě tekutiny ν , délce l a průměru potrubí d , na drsnosti potrubí k . Vzhledem k tomu, že známé

Reynoldsovo kritérium obsahuje některé tyto veličiny, lze říci, že součinitel třecí ztráty je rovněž závislý na tomto kritériu.

Součinitel tření je závislý na Re a na poměrné drsnosti k/d . Takovou závislost ukazuje obr. KON17. Na tomto obrázku je vidět závislost součinitele třecí ztráty a jeho změny v pěti oblastech.



Obr. KON17 K vyjádření součinitele třecí ztráty.

Lineární oblast. Tato oblast odpovídá laminárnímu proudění. Oblast je dána přímkou, která vychází z Hagenova – Poiseuilleova vztahu. Součinitel má jednoduchý vztah $\Lambda = \frac{64}{Re}$.

Přechází-li laminární proudění do turbulentního, ocitá se tekutina v **kritické oblasti**, Re je mezi 2300 až 10 000. V této oblasti je součinitel závislý jen na Re kritériu, protože je systém nestabilní. Ve třetí oblasti je oblast turbulentního proudění, kde součinitel třecí ztráty je popsán **Blasiovou přímkou** pro hladké potrubí. Součinitel tření není závislý na poměrné drsnosti k/d , ale jen na Re kritériu. Při malých hodnotách Re může být potrubí hydraulicky hladké, při velkých Re může být potrubí hydraulicky drsné. To záleží na tloušťce laminární podvrstvy u turbulentního proudění, která musí být mnohonásobně větší, než je výška výstupků drsnosti potrubí. Součinitel třecí ztráty je roven $\Lambda = \frac{0,3164}{\sqrt{Re}}$ a platí pro Re v rozmezí 4000 až 100 000. V **přechodné oblasti** turbulentního proudění je součinitel závislý

nejen na Re , ale také na poměrné drsnosti k/d . Matematických výrazů pro určení součinitele je několik, výraz Altšulův $\Lambda = 0,11 \cdot \left(\frac{68}{Re} + \frac{k}{d} \right)^{0,25}$ je jedním z nejjednodušších. Poslední oblastí je *oblast kvadratická*, kdy součinitel tření není závislý na Re , ale jen na poměrné drsnosti k/d . Tato oblast je oblastí hydraulicky drsného potrubí. Pro výpočty se používá obecný výraz $\Lambda = \frac{A}{Re^n}$. Například pro hladké potrubí $A = 0,316$, $n = 0,25$; keramické potrubí $A = 0,175$, $n = 0,12$.

Drsnosti povrchů. Drsnost stěn potrubí má za následek ztráty třením. Drsnost potrubí je daná nerovnoměrností povrchu potrubí, je určena výškou a tvarem výstupků. Rozlišujeme několik typů drsností a drsnost se také mění během provozu (koroze, eroze, usazeniny, apod.).

Poměrná drsnost (k/d) je poměr mezi střední drsností k a průměrem potrubí d . Tato drsnost má zásadní vliv na hodnotu součinitele tření, než samotná výška výstupků nerovností.

Střední drsnost (k) je střední (průměrná) výška všech výstupků nerovnosti povrchu.

Absolutní drsnost je výška výstupků nerovností povrchu trubek, jednotlivé výstupky mohou být různě vysoké, proto tuto drsnost brát v úvahu při matematických výpočtech.

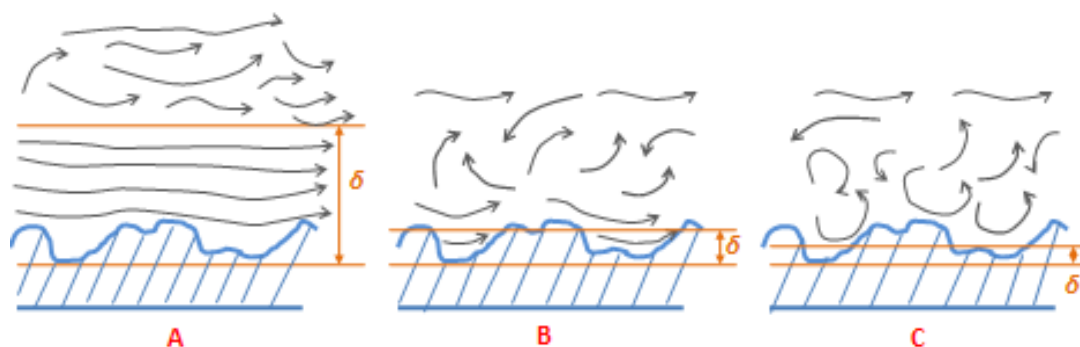
Umělá drsnost je drsnost s rovnoměrným, uměle vytvořeným povrchem. Svou povahou je to střední drsnost.

Přirozená drsnost je drsnost s nerovnoměrným charakterem, výška výstupků a jejich vzdálenost mezi nimi je různá.

Drsnost má vliv na proudění tekutiny a na součinitel třecí ztráty (jak je vidět i v obr. KON17). Z tohoto obrázku je patrné, že u laminárního proudění nemá drsnost vliv na hodnotu součinitele tření. U turbulentního proudění se křivky pro různé drsnosti dotýkají při nižších Re Blasiově přímce. Od určité hodnoty se Re se odpoutávají a přibližují vodorovné přímce. Při turbulentním proudění se u stěny potrubí vytvoří **laminární podvrstva** δ , která přikrývá nerovnosti povrchu, a ty nemají vliv na ztrátu třením. Potrubí se jeví jako hydraulicky hladké. S rostoucím Re , tj. se zvyšující se rychlostí proudící tekutiny a se zvýšenou intenzitou turbulence, tloušťka laminární podvrstvy klesá, až nastane případ, kdy tloušťka mezní vrstvy je menší než největší nerovnost povrchu. Kolem špiček nerovnosti nastane odtrhávání proudu

a vnitřní povrch tak přestává být hladký. Se zvyšující se turbulencí se zvyšuje i součinitel, který „opouští“ Blasiovu křivku a přechází do vodorovné přímky. Součinitel tření nabude stálé hodnoty (vodorovná přímka) až je nerovnost omočeného povrchu mimo laminární podvrstvu a víření se již nezvyšuje ani s rostoucí turbulencí.

Graficky je toto patrné z obr. KON18. *Oblast A* je oblastí s vytvořenou laminární podvrstvou, která zakrývá všechny výstupky-nerovnosti potrubí. Střední hodnota drsnosti k musí být menší, než laminární podvrstva. V *oblasti B* začínají nerovnosti povrchu trubky vyčnívat z laminární podvrstvy. V obr. KON17 je tato oblast znázorněna částí křivek mezi Blasiovou přímkou a vodorovnými přímkami – přechodová oblast. V *oblasti C* je tloušťka laminární podvrstvy velmi malá, nezakrývá již nerovnosti obtékaného povrchu a součinitel tření je závislý na poměrné drsnosti (kvadratická oblast).



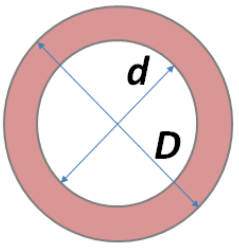
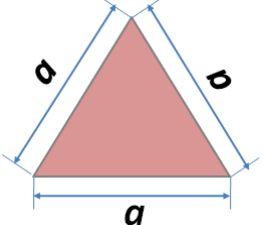
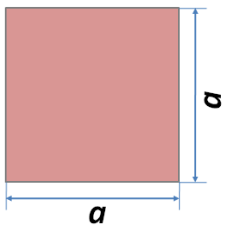
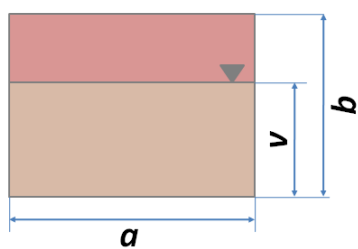
Obr. KON18 K určení laminární podvrstvy při turbulentním proudění.

Ztráty třením v nekruhových potrubích. Pro nekruhová potrubí platí výše uvedené vzorce jak pro laminární, tak pro turbulentní proudění. Průměr potrubí, který byl brán automaticky jako charakteristický rozměr, se změní na hydraulický průměr d_h . V následující tabulce TAB02 je přehled vybraných typů potrubí, vyjádření d_h .

MÍSTNÍ ZTRÁTY. Místní ztráty se v potrubním vedení projevují jako kolena, odbočky, ventily, šoupátka, kohouty, klapky, clony a dýzy a podobně. Místní ztráty tlaku jsou závislé na geometrickém uspořádání potrubního systému a na směru proudění tekutiny. Kromě toho se může měnit průměr potrubí buď náhle, nebo pozvolna. Všechny tyto změny mají rovněž

vliv na rychlost proudění tekutiny a tedy i na Reynoldsovo kritérium. Proudění tekutiny vyvolává víření spojené s rozptylem (ztrátou) energie, která se mění v teplo.

Tabulka TAB02. Typy nekuhových potrubí

Typ potrubí	Hydraulický průměr	Součinitel třecí ztráty										
	$d_h = D - d$	$\Lambda = \frac{64}{Re} \frac{\left(1 - \frac{d}{D}\right)^2}{1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2 + \frac{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2}{\ln \frac{d}{D}}}$										
	$d_h = \frac{a}{\sqrt{3}}$	$\Lambda = \frac{92,4}{Re}$										
	$d_h = a$	$\Lambda = \frac{57}{Re}$										
	$d_h = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b}$ pro obdélník, $d_h = \frac{4 \cdot a \cdot v}{a + 2 \cdot v}$ pro nezaplňený obdélník, $d_h = 2 \cdot b$ pro velmi úzký obdélník $b \ll a$.	$\Lambda = \frac{K}{Re}$ <table border="1" data-bbox="1029 1400 1444 1512"> <tbody> <tr> <td>b/a</td> <td>1</td> <td>0,5</td> <td>0,25</td> <td>0,1</td> </tr> <tr> <td>K</td> <td>57</td> <td>93,2</td> <td>181,8</td> <td>465,9</td> </tr> </tbody> </table>	b/a	1	0,5	0,25	0,1	K	57	93,2	181,8	465,9
b/a	1	0,5	0,25	0,1								
K	57	93,2	181,8	465,9								

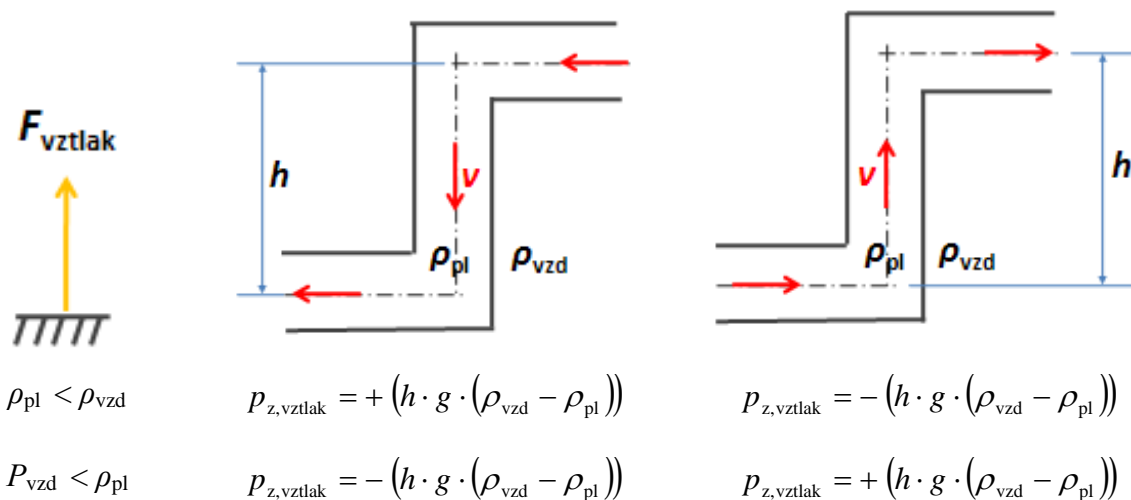
Místní ztráta se vypočte jako tlaková ztráta

$$p_{z,m} = \zeta \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (\text{Pa})$$

kde ζ je *součinitel místní ztráty*. Součinitel závisí na geometrii a na rychlosti proudící tekutiny. Určuje se experimentálně pro daný typ geometrické změny a platí opět pro stejný

typ geometrické změny potrubí, nebo ve fyzikálně podobných případech. Součinitelé místních ztrát jsou uvedeny v tabulkách jako grafické závislosti, nebo jako tabulkové hodnoty.

ZTRÁTA VZTLAKEM. Ztráta vztlakem je dána vzájemným působením vztlakové síly a geometrického tlaku. Ztráta vztlakem se uskutečňuje pouze ve vertikálních potrubích, či kanálech a záleží na hustotě proudící tekutiny a hustotě okolní tekutiny. Pro názornost na obr. **KON19** je vertikální kanál, ve kterém proudí plyn o určité hustotě ρ_{pl} , jeho hustota je menší než hustota okolního vzduchu ρ_{vzd} . Rozeznáváme dva případy – první případ, kdy proudění plynu je shodné se směrem působení vztlakové síly (a) a druhý případ, kdy proudění plynu je proti směru působení vztlakové síly (b).



Obr. **KON19** K objasnění ztrát vztlakem.

CELKOVÉ HYDRAULICKÉ ZTRÁTY. Celkové ztráty tlaku jsou dány součtem ztrát třecích, místních a přičtením, nebo odečtením ztrát vztlakových

$$P_{z,celkem} = P_{z,treci} + P_{z,místni} \pm P_{z,vztlak} \quad (\text{Pa})$$

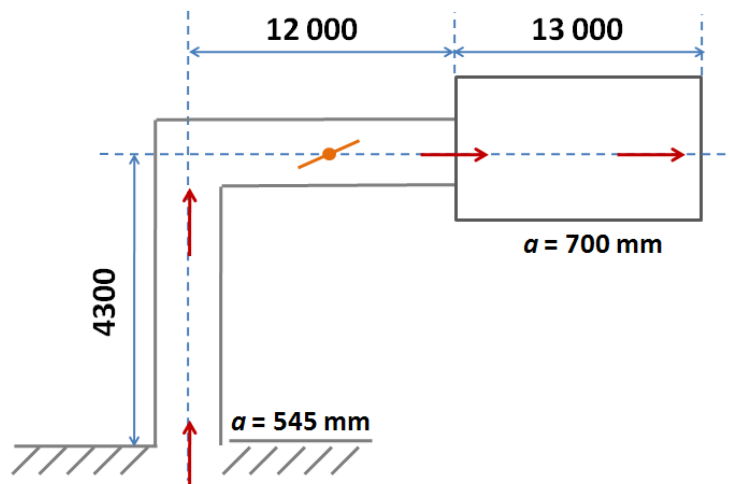
Pokud je proudění tekutiny pouze ve vodorovném směru, ztráta vztlakem odpadá (je rovna nule).

Příklad 3.1

Vodorovným kovovým potrubím obdélníkového průřezu 220x180 mm (délka 52 m), protéká za normálních podmínek 205 m³ vzduchu za hodinu. Teplota vzduchu v potrubí je 45 °C. Jaké budou tlakové ztráty při průtoku vzduchu potrubím?

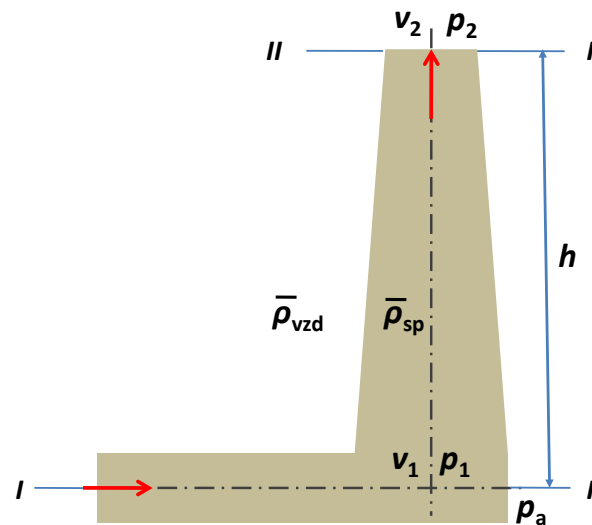
Příklad 3.2

Vodorovný cihlový kanál čtvercového průřezu o stranách 545 mm a 700 mm (dle obrázku), slouží k odvodu spalin koksárenského plynu z pece. Průměrná teplota spalin po celé délce kanálu je 550 °C, $\rho_0 = 1,31 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Rychlost spalin na vstupu do kanálu (vztažená na normální podmínky) je $v_0 = 4,2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. V prvním úseku kanálu je vloženo koleno s ostrým zaoblením a dále škrticí klapka, která je natočena proti ose potrubí o 30 °. Určete celkové tlakové ztráty v odtahovém kanále.



Komín. Komín odvádí spaliny ze spalovacích zařízení a to prostřednictvím přirozeného tahu, který je vytvářen *podtlakem* samotného komína. Vyvolaný podtlak musí být tak velký, aby byly překonány hydraulické ztráty v celém odtahovém (spalinovém) traktu. Pokud nestačí přirozený tah, vyvolaný komínem, zabudovává se do odtahové soustavy ventilátor, aby byly překonány velké hydraulické ztráty soustavy. Z tohoto důvodu je důležitá výška komína. Při výpočtu výšky komína se tlaková ztráta odtahového traktu navyšuje o 20 %.

Spaliny, opouštějící spalovací agregát, jdou do dolní části komína (sopouch) – hladina *I-I* na obr. **KON19A**, procházení celým komínem (díky podtlaku) a vystupují ústím komína do volného ovzduší – hladina *II-II*.



Obr. KON19A K odvození výšky komína a podtlaku.

Spaliny proudí komínem v důsledku podtlaku Δp , který vzniká v rovině $I-I$ jako rozdíl tlaku okolního vzduchu p_a a tlaku spalin p_1 v rovině $I-I$

$$\Delta p = p_a - p_1 \quad (\text{Pa})$$

Hodnotu podtlaku určíme z Bernoulliho rovnice

$$p_1 + \frac{v_1^2}{2} \rho_{1,\text{sp}} = p_2 + \frac{v_2^2}{2} \rho_{2,\text{sp}} + h \cdot g \cdot \bar{\rho}_{\text{sp}} + p_z \quad (\text{Pa}),$$

kde $p_2 = p_a - h \cdot g \cdot \bar{\rho}_{\text{vzd}}$ je tlak v rovině $II-II$, který je shodný jak pro spaliny, tak pro okolní vzduch. Tlakovou ztrátu p_z tvoří ztráty třením v komíně a místní ztráta na výstupu spalin z komína

$$p_z = \Lambda \frac{h}{d} \cdot \frac{\bar{v}^2}{2} \cdot \bar{\rho}_{\text{sp}} + \zeta \frac{v_2^2}{2} \cdot \rho_{2,\text{sp}} \quad (\text{Pa}),$$

kde \bar{v} je střední rychlost spalin, \bar{d} je střední průměr komína, Λ součinitel tření (pro zděné komíny $\Lambda = 0,05$; pro kovové komíny $\Lambda = 0,03$ a součinitel místní ztráty při vyústění z komína $\zeta = 1$). Po dosazení za p_2 a p_z do Bernoulliho rovnice se podtlak Δp vyvolaný komínem vypočte

$$\Delta p = p_a - p_1 = h \cdot g \cdot (\bar{\rho}_{\text{vzd}} - \bar{\rho}_{\text{sp}}) + \frac{v_1^2}{2} \rho_{1,\text{sp}} - \frac{v_2^2}{2} \rho_{2,\text{sp}} - \Lambda \frac{h}{d} \cdot \frac{\bar{v}^{-2}}{2} \cdot \bar{\rho}_{\text{sp}} - \zeta \frac{v_2^2}{2} \rho_{2,\text{sp}} \quad (\text{Pa}),$$

vztaženo na normální podmínky a vzhledem k teplotám

$$\Delta p = h \cdot g \cdot \left(\rho_{0,\text{vzd}} \frac{T_0}{\bar{T}_{\text{vzd}}} - \rho_{0,\text{sp}} \frac{T_0}{\bar{T}_{\text{sp}}} \right) + \frac{v_{0,1}^2}{2} \rho_{0,\text{sp}} \frac{T_{1,\text{sp}}}{T_0} - \frac{v_{0,2}^2}{2} \rho_{0,\text{sp}} \frac{T_{2,\text{sp}}}{T_0} - \Lambda \frac{h}{d} \cdot \frac{\bar{v}_0^{-2}}{2} \cdot \rho_{0,\text{sp}} \frac{\bar{T}_{\text{sp}}}{T_0} - \zeta \frac{v_{0,2}^2}{2} \rho_{0,\text{sp}} \frac{T_{2,\text{sp}}}{T_0} \quad (\text{Pa})$$

Výška komína je pak

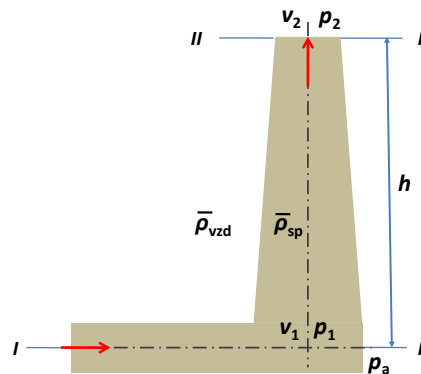
$$h = \frac{\Delta p - \frac{v_{0,1}^2}{2} \cdot \rho_{0,\text{sp}} \frac{T_{1,\text{sp}}}{T_0} + v_{0,2}^2 \cdot \rho_{0,\text{sp}} \frac{T_{2,\text{sp}}}{T_0}}{g \cdot \left(\rho_{0,\text{vzd}} \frac{T_0}{\bar{T}_{\text{vzd}}} - \rho_{0,\text{sp}} \frac{T_0}{\bar{T}_{\text{sp}}} \right) - \Lambda \frac{h}{d} \cdot \frac{\bar{v}_0^{-2}}{2} \cdot \rho_{0,\text{sp}} \frac{\bar{T}_{\text{sp}}}{T_0}} \quad (\text{m})$$

Výšku komína lze taktéž vypočítat z empirického vztahu $h = \frac{\Delta p}{5}$, jako první přiblížení ve výpočtu.

Příklad 3.3

Určete výšku komína odvádějícího spaliny zemního plynu, jejichž teplota u paty komína je $t_{\text{sp},1} = 450 \text{ }^\circ\text{C}$. Komín je válcového tvaru o průměru $d = 11 \text{ m}$. Hustota a rychlost spalin za normálních podmínek jsou $\rho_{0,\text{sp}} = 1,24 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, $v_{0,\text{sp}} = 2,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Hustota okolního vzduchu za normálních podmínek je $\rho_{0,\text{vzd}} = 1,22 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Střední teplota okolní atmosféry $t_{\text{vzd}} = 20 \text{ }^\circ\text{C}$. Součinitel prostupu tepla stěnou komínového průduchu $k = 2,3 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$, součinitel tření v komínovém průduchu $\Lambda = 0,048$. Celkové tlakové ztráty spalinového traktu jsou $p_z = 265 \text{ Pa}$.

Situace je na tomto obrázku:



3.6. Výtok tekutin otvory

Výtok tekutin otvory si můžeme představit jako proudění tekutin z ústí hořáků a trysek, nebo úniky tekutin ve stěnách průmyslových zařízení, apod. Jedná se v podstatě o místní ztrátu. Rozlišuje se výtok tekutiny při nízkých rychlostech a při vysokých rychlostech. Při výpočtech se stanovuje rychlost na výstupu z otvoru a množství vytékající tekutiny – objemový, resp. hmotnostní průtok. Rovněž lze určit kritické (maximální) hodnoty veličin – tlak, hustota, teplota, rychlost, hmotnostní průtok a plochu výtokového průřezu.

Výtok tekutiny při nízkých rychlostech. Podmínkou „nízké rychlosti“ je tlakový rozdíl plynu před (p_1) a za otvorem (p_2) $p_1 - p_2 \leq 5$ kPa. Na obr. KON20 je znázorněn otvor ve stěně, ze které plyn vytéká do prostoru s tlakem p_2 . Proudění tekutiny se řídí Bernoulliho rovnicí ve tvaru

$$p_1 + \frac{v_1^2}{2} \cdot \rho_{pl} = p_2 + \frac{v_2^2}{2} \cdot \rho_{pl} + p_z \dots \text{kde } p_z = \zeta \cdot \frac{v_2^2}{2} \cdot \rho_{pl} \text{ je místní ztráta tlaku při výtoku.}$$

Budeme-li, na základě obrázku, uvažovat, že průtočná plocha v řezu I-I je mnohem větší, než II-II, pak rychlost $v_1 = 0$, výtoková rychlost v_2 je dána úpravou Bernoulliho rovnice a má tvar

$$v_2 = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta} \cdot \frac{2 \cdot (p_1 - p_2)}{\rho_{pl}}} = \varphi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho_{pl}}} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1}),$$

kde φ je rychlostní součinitel a ζ je součinitel místní ztráty.

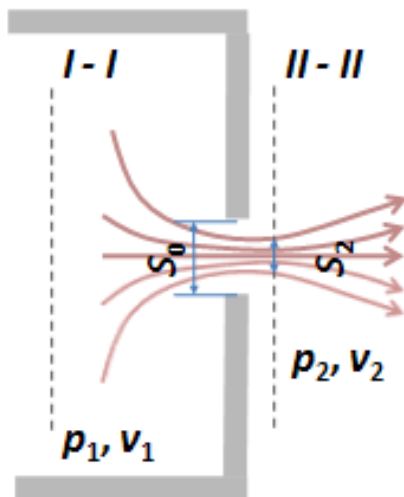
Zúžení proudu v řezu II-II, tedy S_2 je menší než průřez otvoru S_0 a tuto skutečnost charakterizuje součinitel zúžení $\varepsilon = \frac{S_2}{S_0}$. Množství vytékajícího plynu lze vyjádřit objemovým

(Q_v), resp. hmotnostním průtokem (Q_m) z rovnice kontinuity

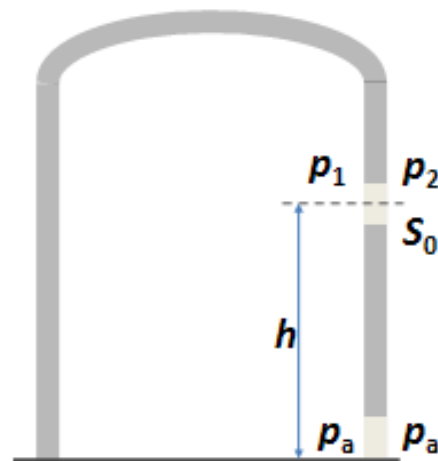
$$Q_v = S_2 \cdot v_2 = \varepsilon \cdot \varphi \cdot S_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho_{pl}}} = \mu \cdot S_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho_{pl}}} \quad (\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1})$$

$$Q_m = Q_v \cdot \rho_{pl} = \mu \cdot \rho \cdot S_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho_{pl}}} = \mu \cdot S_0 \cdot \sqrt{2 \cdot \Delta p \cdot \rho_{pl}} \quad (\text{kg} \cdot \text{s}^{-1})$$

kde $\mu = \varepsilon \cdot \varphi$ je výtokový součinitel.



Obr. KON20 výtok plynu otvorem



Obr. KON21 Výtok plynu otvorem v boční stěně

Pokud vytéká tekutina (plyn) otvorem o průřezu S_0 ve stěně pece, kdy na úrovni níže je tlak roven tlaku atmosférickému p_a (obr. KON21), pak hodnoty tlaku p_1 a p_2 se určují v závislosti na tlaku geometrickém.

$$p_1 = p_a - h \cdot g \cdot \rho_{pl} \quad \text{a rozdíly tlaků } \Delta p = p_1 - p_2 = h \cdot g \cdot (\rho_{vzd} - \rho_{pl}).$$

$$p_2 = p_a - h \cdot g \cdot \rho_{vz}$$

Výtoková rychlost plynu

$$v_2 = \varphi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot g \cdot (\rho_{\text{vzd}} - \rho_{\text{pl}})}{\rho_{\text{pl}}}}$$

Objemový a hmotnostní tok plynu

$$Q_V = \mu \cdot S_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h \cdot g \cdot (\rho_{\text{vzd}} - \rho_{\text{pl}})}{\rho_{\text{pl}}}}$$

$$Q_m = \mu \cdot S_0 \cdot \sqrt{2 \cdot h \cdot g \cdot (\rho_{\text{vzd}} - \rho_{\text{pl}})} \cdot \rho_{\text{pl}}$$

Příklad 3.4

Při přetlaku 2,6 kPa vytéká čtvercovým otvorem o straně 0,27 m v tenké pecní stěně plyn o hustotě $\rho_{0,\text{pl}} = 1,24 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Stanovte výtokovou rychlost, objemový a hmotnostní tok plynu o teplotě 500 °C. Výtokový součinitel je $\mu = 0,62$, rychlostní součinitel je $\varphi = 0,98$.

Výtok plynu při vysokých rychlostech. Při výtoku plynu při vysokých rychlostech je nutno uvažovat změnu hustoty s tlakem. Situace je stejná jako na obr. **KON20**, podmínkou pro „vysoké rychlosti“ je rozdíl tlaků $p_1 - p_2 > 10 \text{ kPa}$ a rovnice pro jednotlivé veličiny mají jiný tvar.

Výtoková rychlost v_2 , která respektuje změnu hustoty s tlakem je

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot r \cdot T_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

Hmotnostní průtok tekutiny

$$Q_m = S_2 \cdot \rho_2 \cdot v_2 \quad (\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}) \text{ a hustota v závislosti na tlaku je } \rho_2 = \rho_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}},$$

kde $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$ je Poissonova konstanta (adiabatický koeficient). Pro plyny jednoatomové je

$\kappa = 1,67$; dvouatomové $\kappa = 1,4$; tří a víceatomové $\kappa = 1,33$; pro přehřátou páru $\kappa = 1,3$.

Dosadíme-li výrazy pro ρ_2 a v_2 do výrazu pro hmotnostní průtok dostaneme

$$Q_m = S_2 \cdot \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 \cdot \rho_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} \quad (\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}).$$

Pokud na výstupu z otvoru dosáhneme kritického (maximálního) tlaku $p_2 = p_{\text{kr}}$, pak všechny ostatní veličiny lze vyjádřit následovně

$$p_{\text{kr}} = p_1 \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad (\text{Pa})$$

$$\rho_{\text{kr}} = \rho_1 \left(\frac{p_{\text{kr}}}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = \rho_1 \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{1}{\kappa}} = \rho_1 \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$$

$$T_{\text{kr}} = \frac{p_{\text{kr}}}{\rho_{\text{kr}} \cdot r} = \frac{p_1 \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\rho_1 \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cdot r} = T_1 \cdot \frac{2}{\kappa+1} \quad (\text{K})$$

$$v_{\text{kr}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} \left[1 - \left(\frac{p_{\text{kr}}}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa+1} \cdot r \cdot T_1} \quad (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$$

$$Q_{m,\text{kr}} = S_2 \cdot \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} p_1 \cdot \rho_1 \left[\left(\frac{p_{\text{kr}}}{p_1} \right)^{\frac{2}{\kappa}} - \left(\frac{p_{\text{kr}}}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} = S_2 \cdot \sqrt{\kappa \cdot \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \cdot p_1 \cdot \rho_1} \quad (\text{kg} \cdot \text{s}^{-1})$$

Kritickou výtokovou plochu S_2 lze určit z rovnice pro hmotnostní průtok, který se nemění. Skutečné výtokové charakteristiky plynu jsou sníženy – výtoková rychlost se vynásobí rychlostním součinitelem $\phi = 0,95$ a množství vytékajícího plynu výtokovým součinitelem $\mu = 0,92$. Takto snížené hodnoty lépe odpovídají technické praxi.

Proudění plynu při vysokých rychlostech se uskutečňuje v *tryskách*, které jsou speciálně sestrojeny a navrženy tak, aby nedocházelo ke ztrátám energie, ale byla dosažena maximální rychlost, nebo rychlosti větší než maximální. Proudění plynů v oblasti vysokých rychlostí je určeno *Machovým číslem* (kritériem), jako poměr rychlosti plynu k rychlosti zvuku

$$Ma = \frac{v}{c} \quad \text{rychlost zvuku} \quad c = \sqrt{\kappa \cdot \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot r \cdot T}$$

kde r je měrná plynová konstanta prostředí ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

Dle Machova kritéria rozeznáváme různé druhy proudění

$Ma < 1$ je proudění podzvukové (**subsonické**),

$Ma = 1$ je proudění kritické (**sonické**), rychlost proudícího plynu je rovna rychlosti zvuku,

$0,8 < Ma < 1,3$ je proudění **transsonické**,

$1,2 < Ma < 5$ je proudění nadzvukové (**supersonické**),

$Ma > 5$ je proudění **hypersonické**, rychlost proudícího plynu je větší než rychlost zvuku.

Pozn. První kosmická rychlost (vztaženo k 0 m n.m.) je cca $7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, což odpovídá $Ma = 22,82$. Snadno si tak lze dopočítat Machovo kritérium např. pro družice na oběžné dráze...

Jednoduchá tryska. Jednoduchá tryska má tvar konfuzoru (zúžujícího se průřezu), jak je patrné z obr. **KON22**. Při proudění tekutiny jednoduchou tryskou podzvukovou rychlostí se bude při zvyšování tlaku p_1 zvyšovat rychlost v_2 . Tlak na výstupu p_2 bude roven atmosférickému tlaku okolního prostředí. Při určité hodnotě tlaku plynu p_1 dosáhne tekutina na výstupu z trysky kritické rychlosti v_{kr} , která se rovná rychlosti zvuku. Zvyšujeme-li dále tlak na vstupu p_1 , rychlost na výstupu se nezvyšuje nad hodnotu v_{kr} , ale začne se na výstupu zvyšovat tlak p_2 , který je větší než tlak atmosférický. Snížení tlaku p_2 na hodnotu p_a nastává až mimo trysku, to znamená, že rozdíl tlaků se nevyužije pro práci v trysce - nastává energetická ztráta. Toto je nedostatek jednoduché trysky, která není vhodná když $p_2 > p_a$ (p_{kr}). Při výpočtech jednoduché trysky se nejčastěji určuje výtoková rychlost plynu v_2 , výstupní průřez S_2 . Pro výpočty použijeme rovnice pro výtok plynu při vysokých rychlostech.

Příklad 3.5

Jednoduchou tryskou o výstupním průměru $d_2 = 0,027 \text{ mm}$ vytéká kyslík. Fyzikální veličiny kyslíku jsou: přetlak na vstupu do trysky 635 kPa , teplota $t = 59 \text{ }^\circ\text{C}$, měrná plynová konstanta $r = 259,82 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Hodnota $\kappa = 1,4$, rychlostní součinitel $\varphi = 0,95$, výtřkový součinitel $\mu = 0,92$. Tlak okolní atmosféry $p_a = 101$ kPa. Určete na výstupu z trysky rychlost v_2 , teplotu t_2 , hustotu ρ_2 a hmotnostní tok kyslíku.

Lavalova tryska. Lavalova tryska se skládá ze zúžené části (konfuzoru) a rozšířené části (difuzoru), jak je vidět na obr. KON23. Konfuzor podléhá stejným zákonitostem jako jednoduchá tryska. Proud tekutiny zde může dosáhnout jen kritické rychlosti v_{kr} , tj. rychlosti šíření zvuku. Při dalším zvýšení tlaku p_1 nad hodnotu, kdy v nejužším průřezu trysky S_2 je dosaženo v_{kr} se již rychlost nezvyšuje nad v_{kr} , ale zvyšuje se tlak p_{kr} . Pokud je $p_{kr} > p_a$ využije se tento *přetlak* v difuzoru jako zvýšení rychlosti (nadzvuková rychlost). Maximum využití energie přetlaku $p_{kr} - p_a$ se dosáhne tehdy, když celý přetlak se využije po celé délce rozšířené části trysky. Nejvhodnější použití Lavalovy trysky je opět, kdy hodnota tlaku p_3 (na výstupu) je rovna tlaku okolního prostředí p_a .

Jestliže je rychlost v S_2 menší než kritická rychlost ($v_2 < v_{kr}$) nebude se rychlost v rozšířené části trysky zvyšovat, protože zde není přetlak, ale snižovat.

K výpočtům Lavalovy trysky používáme výše uvedené vzorce pro výtoky plynů při vysokých rychlostech. K těmto vzorcům můžeme ještě přidat vzorec pro výpočet délky difuzoru L .

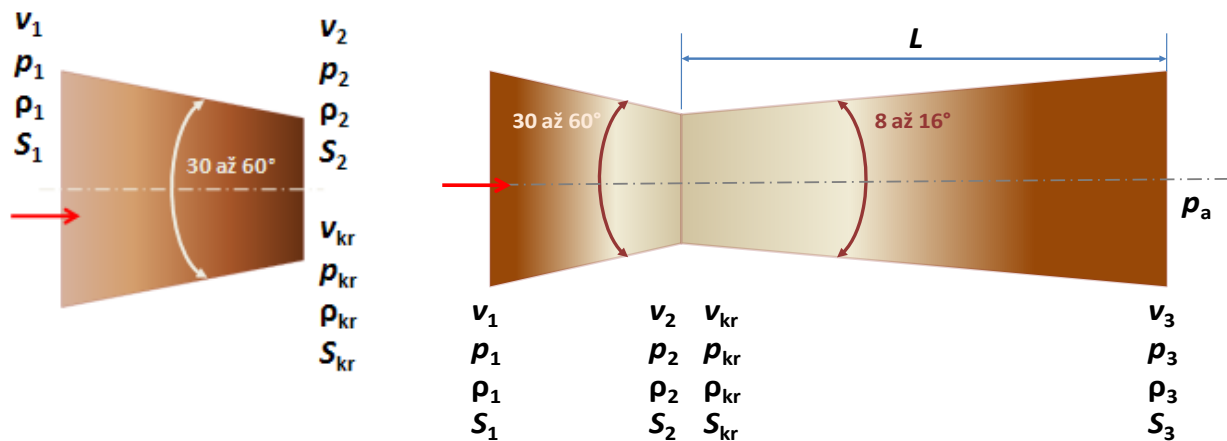
$$L = \frac{d_3 - d_{kr}}{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \quad (\text{m}),$$

kde β je úhel rozevření.

Příklad 3.6

Navrhněte Lavalovu trysku pro vzduch, je-li tlak před tryskou 0,64 MPa, teplota 560 °C a hmotnostní tok 2,05 kg.s⁻¹. Vzduch vytéká do prostředí o tlaku 0,1 MPa.

Fyzikální veličiny vzduchu: měrná plynová konstanta $r = 287,06$ J.kg⁻¹.K⁻¹, hodnota $\kappa = 1,4$.



Obr. KON22 Jednoduchá tryska

Obr. KON23 Lavalova tryska

3.7. KONVEKCE

Sdílení tepla konvekcí se uskutečňuje při *pohybu* tekutiny a zároveň dochází k *výměně* (*sdílení*) tepla, např. mezi tekutinou a tuhou látkou – proudící tekutina předává, či odebírá teplo z povrchu okolních těles. Ke konvekci může dojít nejen mezi tekutinou a tuhou látkou (např. parovod), ale rovněž mezi dvěma plynnými, nebo dvěma kapalnými látkami, nebo mezi kapalnou a plynnou látkou. Příkladem takového přestupu tepla může být konvekce při varu, nebo kondenzaci.

Konvekce tak představuje současné vedení tepla (kondukce) a proudění tekutiny – hovoříme o *konvečně-kondukčním* sdílení tepla. Poměr konvekce a kondukce na celkovém přestupu tepla je různý a záleží na druhu proudění a fyzikálních vlastnostech proudící tekutiny. Čím intenzivnější je pohyb molekul, tím menší je podíl sdílení tepla vedením.

Konvekci rozdělujeme na přirozenou (volnou) a nucenou. Obě konvekce se mezi sebou liší svým vznikem. **Přirozená konvekce** je nejčastěji vyvolaná působením gravitačního pole na nerovnoměrně prohřátou tekutinu. Přirozenou konvekci tak vyvolává tíhová síla (nebo hmotnostní síly). **Nucená konvekce** je vyvolaná externím zásahem do tekutiny – tekutina je ke svému pohybu nucena, například ventilátorem, čerpadlem, popř. komínem.

Obě dvě konvekce probíhají společně, jen jejich podíl se odvíjí od rychlosti tekutiny. Podíl přirozené konvekce je tím větší, čím menší je rychlost nuceného proudění a čím větší jsou teplotní gradienty v tekutině. Při vysokých rychlostech proudění je vliv přirozeného proudění zanedbatelný.

Přestup tepla při konvekci. V následujících odstavcích se zaměříme na konvekci mezi tekutinou a tuhou látkou – přenos tepla ze stěny do tekutiny. Teplo se šíří ze stěny vedením přes laminární podvrstvu a pak prouděním. Matematicky lze toto vyjádřit jako měrný tepelný tok q (mezi povrchem stěny a proudící tekutinou) ve směru normály n k povrchu, nebo jako rovnost I. Fourierova zákona a Newtonova zákona

$$q_{\text{konvekce}} = -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right) = \alpha_{\text{kon}} \cdot (t_{\text{povrch}} - t_{\text{tekutina}}),$$

kde součinitel přestupu tepla konvekcí α_{kon} lze z této rovnice vyjádřit jako

$$\alpha_{\text{kon}} = -\frac{\lambda}{t_{\text{povrch}} - t_{\text{tekutina}}} \cdot \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right) \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}).$$

Součinitel přestupu tepla konvekcí je množství tepla, předané za jednotkový čas mezi tekutinou a jednotkovou plochou povrchu stěny, je-li mezi povrchem a tekutinou rozdíl teplot 1K. Hodnoty součinitele přestupu tepla konvekcí se pohybují dle charakteru děje v různých mezích, jak ukazuje tabulka **TAB03**.

Tabulka **TAB03**. Hodnoty součinitele přestupu tepla konvekcí

děj	α_{kon} ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$)
Plyny při přirozené konvekci	5 až 100
Voda při přirozené konvekci	100 až 1 000
Plyny při proudění v trubkách a mezi trubkami	10 až 5 000
Voda při proudění v trubkách	50 až 10 000
Voda při bublinovém varu	2 000 až 40 000
Pára při blánové kondenzaci	4 000 až 15 000
Pára při kapkové kondenzaci	30 000 až 140 000

Součinitel α_{kon} stanovuje *intenzitu* výměny tepla na rozhraní tekutiny a povrchu stěny. Čím je součinitel vyšší, tím intenzivněji k výměně tepla dochází. Proto je důležité určit hodnotu součinitele, abychom správně vyjádřili konvekci. Při *určení* součinitele přestupu tepla konvekcí se využívá reálných experimentů. Výsledky experimentálních měření jsou zpracovány do kritériálních rovnic, jejichž platnost je omezena rozsahem měření. Naměřené výsledky zachycují skutečný děj se vzájemnou závislostí všech zúčastněných (např. fyzikálních) veličin. Rovnice, která by umožnila výpočet α_{kon} , musí obsahovat vlivy fyzikálních vlastností kapaliny, charakter proudění za daných podmínek a v dané geometrii. Nelze proto stanovit univerzální rovnici pro všechny podmínky přestupu tepla konvekcí (ať již přirozenou nebo nucenou).

Z těchto důvodů byla stanovena **obecná kritériální rovnice** sdílení tepla konvekcí, popisující celý proces sdílení tepla konvekcí obecně. A protože se jedná o kritériální rovnici, obsahuje tato rovnice kritéria – bezrozměrná čísla – která byla získána např. analýzou základních rovnic platných pro konvekci. Tedy

$$Nu = f(Re, Gr, Pr, Fo, Po, \zeta_x, \zeta_y, \zeta_z) \quad (1),$$

kde $\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z$ jsou bezrozměrné souřadnice.

Popis jednotlivých kritérií obsažených v kritériální rovnici udává tabulka **TAB04**. V této tabulce jsou rovněž kritéria vyjádřena známými veličinami. Pouze však v jediném kritériu – **kritériu Nusseltově** – je obsažen součinitel přestupu tepla α_{kon} .

Tabulka TAB04. Základní kritéria pro přestup tepla konvekcí.

kritérium	značka	vzorec	text
Nusseltovo	Nu	$Nu = \frac{\alpha_{kon} \cdot l}{\lambda}$	Sdílení tepla konvekcí.
Reynoldsovo	Re	$Re = \frac{v \cdot l}{\nu}$	Poměr sil setrvačných a vazkých.
Grashoffovo	Gr	$Gr = \frac{g \cdot \gamma \cdot \Delta T \cdot l^3}{\nu^2}$	Přirozená konvekce skutečné (vazké) tekutiny.
Prandtlovo	Pr	$Pr = \frac{\nu}{a}$	Sdílení tepla v tekutinách.
Fouriérov	Fo	$Fo = \frac{a \cdot \tau}{l^2}$	Rychlost šíření tepla v tělese. Bezrozměrný čas.
Pomerancevovo	Po	$Po = \frac{q_v \cdot l^2}{\lambda \cdot \Delta T}$	Teplotní pole s vnitřním objemovým zdrojem.

Kritéria obsahující l , obsahují tzv. charakteristický rozměr. Tento je dán geometrickými podmínkami řešeného děje. Charakteristickým rozměrem může být např. průměr potrubí, nebo hydraulický průměr, jak bylo dříve uvedeno.

Kritériální rovnici můžeme dále zjednodušovat dle typu děje. Pokud děj se uskutečňuje bez vnitřního objemového zdroje, pak Pomerancevovo kritérium neuvažujeme. Pokud děj je dějem stacionárním, neuvažujeme kritérium Fourierovo. Je-li Nusseltovo kritérium po celém povrchu stěny konstantní, neuvažujeme bezrozměrné souřadnice ζ_x , ζ_y , ζ_z . Kritériální rovnice má pak zjednodušený tvar

$$Nu = f(Re, Gr, Pr) \quad (1)$$

Při přirozené konvekci, kdy je dominantní Grashoffovo kritérium, má kritériální rovnice tvar

$$Nu = f(Gr, Pr)$$

Při nucené konvekci nemá Grashoffovo kritérium na proudění vliv, pak kritériální rovnice má tvar

$$Nu = f(Re, Pr)$$

Na základě kritériálních rovnic lze provést tato konstatování:

- Součinitel přestupu tepla konvekcí nelze určit v celém rozsahu proudění, ale pro laminární, přechodovou a turbulentní oblast zvlášť.
- Součinitel přestupu tepla konvekcí roste s hodnotou Re kritéria, s výjimkou laminárního proudění.
- Prandtlovo kritérium obsahuje pouze fyzikální veličiny proudící tekutiny.
- S rostoucím Grashoffovým kritériem roste míra přirozené konvekce. Při malých rychlostech je i turbulence malá a proto Re kritérium nahradíme kritériem Gr .
- S rostoucím Re intenzita přestupu tepla se zvyšuje, takže pro turbulentní proudění má Re kritérium dominantní význam.

Kritériální rovnice jsou pak aplikovány na jednotlivé děje pro přirozenou, nebo nucenou konvekci. Takovými ději může být např. přirozená konvekce ve volném, či omezeném prostoru, nucená konvekce při proudění v trubkách a kanálech, podél rovinné desky, příčné obtékání trubek, apod.

Kritériální rovnice pro přirozenou konvekci. Při přirozené konvekci, kdy je tekutina ve styku s ohřívanou stěnou, dochází k cirkulaci tekutiny vlivem rozdílných hustot. Rychlost cirkulace závisí na tvaru ohřívané stěny (neohraničený prostor), či nádoby (ohraničený prostor), ve kterém se tekutina pohybuje. Charakteristickým kritériem je Grashoffovo kritérium. Kritériální rovnice v obecném tvaru pro *neohraničený* prostor

$$Nu = c \cdot (Gr \cdot Pr)^n$$

Konstanty c a n jsou závislé na velikosti součinu kritérií $Gr \cdot Pr$, a proto jejich vyjádření je v tabulce **TAB05**.

Tabulka **TAB05**. Hodnoty konstant c a n pro přirozené proudění.

$Gr \cdot Pr$	c	n
10^{-3}	0,450	0
$1 \cdot 10^{-3}$ až $5 \cdot 10^2$	1,180	0,125
$5 \cdot 10^2$ až $2 \cdot 10^7$	0,540	0,250
$2 \cdot 10^7$ až $1 \cdot 10^{13}$	0,135	0,333

Charakteristický rozměr pro svislou stěnu je výška stěny, pro vodorovný válec je to vnější průměr. Charakteristická teplota je aritmetický průměr průměrné teploty tekutiny a průměrné teploty povrchu stěny.

Pro *ohraničený* (uzavřený) prostor, kde b je šířka mezery mezi stěnami, se určuje konvekční součinitel ε_{kon} , který je závislý na součinu kritérií $Gr.Pr$.

Je-li $Gr.Pr < 1000$, pak $\varepsilon_{\text{k}} = 1$; Je-li $Gr.Pr > 1000$, pak $\varepsilon_{\text{kon}} = 0,18 \cdot (Gr.Pr)^{0,25}$. Samotný přestup tepla se pak počítá jako vedení jednoduchou stěnou, tedy

$$q = \frac{\lambda_{\text{ekv}}}{b} \cdot (t_1 - t_2) = \frac{\varepsilon_{\text{kon}} \cdot \lambda_{\text{tekutina}}}{b} \cdot (t_1 - t_2),$$

kde λ_{ekv} je ekvivalentní tepelná vodivost ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) a $\lambda_{\text{tekutina}}$ je součinitel tepelné vodivosti tekutiny ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

Příklad 3.7

Stanovte ztrátu tepla konvekcí z 1 m délky horizontálního výměníku tepla válcového tvaru, který je ochlazován okolním vzduchem. Vnější průměr výměníku je 870 mm. Teplota povrchu 110 °C a teplota okolního vzduchu je 10 °C. Prandtlovo kritérium $Pr = 0,719$.

Příklad 3.8

Ve vodorovné ploché mezeře je uzavřena voda mezi dvěma plášti. Horní stěna pláště má teplotu 28 °C, spodní stěna 54 °C. Mezera má výšku 55 mm. Určete λ_{ekv} a hustotu tepelného toku q . Hodnota Prandtlova kritéria pro vodu při 40 °C $Pr = 4,351$; pro 50 °C $Pr = 3,583$.

Kritériální rovnice pro nucenou konvekci. Při nucené konvekci existuje mnoho případů proudění. Zde uvádíme několik nejčastějších typů a příslušné kritériální rovnice. Charakteristickým kritériem je Reynoldsovo kritérium.

Laminární proudění v trubkách a kanálech. Charakteristická teplota je průměrná teplota mezi teplotou proudicího média a vnitřním povrchem, tedy

$$Nu = \sqrt[3]{3,66^3 + 1,61^3 \cdot Re \cdot Pr} \cdot \frac{d}{l}$$

Turbulentní proudění v trubkách a kanálech. Charakteristická teplota je střední teplota proudicího média.

$$Nu = 0,021 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,43} \cdot \left(\frac{Pr}{Pr_{\text{průr}}} \right)^{0,25}$$

Proudění podél rovinné desky. Charakteristická teplota je teplota proudicího média, charakteristickým rozměrem je délka desky ve směru proudění.

$$Nu = 0,67 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{0,33} \quad \text{pro laminární proudění } Re < 5 \cdot 10^5,$$

$$Nu = 0,037 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,43} \quad \text{pro turbulentní proudění } Re > 5 \cdot 10^5.$$

Příčné obtékání trubky. Charakteristickou teplotou je teplota proudicího média, charakteristickým rozměrem je vnější průměr trubky.

$$Nu = 0,5 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{0,38} \cdot \left(\frac{Pr}{Pr_{\text{průr}}} \right)^{0,25} \quad \text{pro } 5 < Re < 1 \cdot 10^3,$$

$$Nu = 0,25 \cdot Re^{0,6} \cdot Pr^{0,38} \cdot \left(\frac{Pr}{Pr_{\text{průr}}} \right)^{0,25} \quad \text{pro } 1 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^5,$$

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,37} \cdot \left(\frac{Pr}{Pr_{\text{průr}}} \right)^{0,25} \quad \text{pro } 2 \cdot 10^5 < Re < 2 \cdot 10^6,$$

kde $Pr_{\text{prům}}$ je Prandtlovo kritérium pro průměrnou teplotu povrchu trubky. Výraz v závorce

$\left(\frac{Pr}{Pr_{\text{prům}}}\right)^{0,25}$ je pro plyny roven hodnotě jedna.

Příklad 3.9

Tenká deska o délce 2 m a šířce 1,5 m je podélně oboustranně obtékána proudem vzduchu. Rychlost proudu vzduchu je $1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, teplota vzduchu je $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Teplota povrchu desky je $90 \text{ }^\circ\text{C}$. Stanovte součinitel přestupu tepla konvekcí po délce desky a množství tepla předaného povrchem desky proudícím vzduchem. Prandtlovo kritérium $Pr = 0,717$.

Fourierova Kirchhoffova rovnice. Tato rovnice popisuje teplotní pole proudící tekutiny. Předpokládá se proudění tekutiny homogenní, izotropní, s konstantními fyzikálními vlastnostmi a s rovnoměrně rozprostřenými vnitřními objemovými zdroji. Děj probíhá při konstantním tlaku (děj izobarický) a zanedbá se tepelná energie, která vznikne jako ztráta (disipace).

Odvození této rovnice si provedeme na části proudící tekutiny, z níž si vytkneme elementární objem dV o stranách dx , dy , dz . Jednotlivými stranami se do elementárního objemu přivádí a odvádí teplo vedením i konvekcí. Uvnitř elementárního objemu se uvolňuje teplo z vnitřních objemových zdrojů,

Pro vedení tepla v tuhém tělese byla již dříve odvozena rovnice energetické rovnováhy při izobarickém tlaku ve tvaru

$$\rho \cdot \frac{\partial i}{\partial \tau} = -\text{div } \mathbf{q} + q_v \quad (\text{W}\cdot\text{m}^{-3}),$$

kde \mathbf{q} je hustota tepelného toku ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$) a je rovna $\mathbf{q} = -\lambda \cdot \mathbf{grad}t$. Pro pohybující se prostředí je nutno k této (Fourierově rovnici, neboli I. Fourierovu zákonu) přidat ještě teplo, které tekutina o rychlosti \mathbf{v} , hustotě ρ a měrné entalpii i přenese přes jednotku plochy za jednotku času, tedy

$$\mathbf{q} = -\lambda \cdot \mathbf{grad}t + \rho \cdot \mathbf{v} \cdot i \quad (\text{W}\cdot\text{m}^{-2}), \text{ pro jednotlivé směry}$$

$$q_x = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + \rho \cdot v_x \cdot i \quad q_y = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + \rho \cdot v_y \cdot i \quad q_z = -\lambda \cdot \frac{\partial t}{\partial z} + \rho \cdot v_z \cdot i$$

Po dosazení do rovnice energetické rovnováhy (za předpokladu, že λ a ρ jsou konstantní) pak platí

$$\rho \cdot \frac{\partial i}{\partial \tau} = \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) - \rho \cdot \left(v_x \frac{\partial i}{\partial x} + v_y \frac{\partial i}{\partial y} + v_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) - \rho \cdot i \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + q_v$$

Pro nestlačitelnou tekutinu platí rovnice kontinuity ve tvaru $\text{div } \mathbf{v} = 0$ a třetí člen rovnice vypadává a rovnice lze upravit na tvar

$$\rho \cdot \left(\frac{\partial i}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial i}{\partial x} + v_y \frac{\partial i}{\partial y} + v_z \frac{\partial i}{\partial z} \right) = \lambda \cdot \nabla^2 t + q_v \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-3}),$$

Pro izobarický děj platí $di = c_p \cdot dt$ a po dosazení do rovnice tato rovnice přechází na tvar

$$\frac{\partial i}{\partial \tau} + \left(v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} + v_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) = a \cdot \nabla^2 t + \frac{q_v}{c_p \cdot \rho} \quad (\text{K} \cdot \text{s}^{-1})$$

Toto je **Fourierova – Kirchhoffova rovnice** popisující teplotní pole proudícího prostředí. Pokud se složky rychlosti $v_x = v_y = v_z = 0$, pak rovnice se změní na rovnici vedení tepla (II. Fourierův zákon). Při výpočtu teplotního pole proudící tekutiny, ale také tlakového pole a rychlostního pole se kromě Fourierovy – Kirchhoffovy rovnice používají ještě tři pohybové rovnice Navierovy – Stokesovy a rovnice kontinuity.



Shrnutí pojmů kapitoly 3

Geometrický tlak charakterizuje energii polohy. **Dynamický tlak** charakterizuje kinetickou energii a vzniká při proudění tekutin. **Celkový tlak** je dán součtem tlaku statického a dynamického. **Absolutní tlak** je vztažen k absolutní nule, tj. k vakuu. Relativní tlak je vztažen ke smluvené hodnotě (např. atmosférický tlak p_a).

Máme-li plyn uzavřen v nádobě, můžeme říci, že jeho tlak p je absolutní (**statický**). Vzhledem k atmosférickému tlaku může být absolutní tlak vyšší (pak hovoříme o **přetlaku**), nebo nižší (**podtlak**).

Ztrátový tlak je dán tlakovými ztrátami při proudění tekutin.

Mezi **základní plynové zákony** patří – Boyleův – Mariottův ($T = \text{konst.}$), Gay – Lussacův zákon ($p = \text{konst.}$) a Charlesův zákon ($V = \text{konst.}$). Pro reálné plyny platí van der Waalsova rovnice.

Viskozita tekutin souvisí s vnitřním odporem tekutiny proti smykovému (tečnému) napětí. Rozeznáváme dynamickou viskozitu, jež vychází z Newtonova zákona a kinematická viskozita. Viskozita je závislá na teplotě a pro jednotlivé látky lze nalézt tabulkové hodnoty.

Povrchové napětí nám udává jaké vlastnosti má tekutina ve styku s různým prostředím na jejich vzájemném rozhraní. Tekutina (kapalina) může povrch nádoby smáčet, nebo nesmáčet. Povrchové napětí se výrazně projevuje v kapilárách.

Technologické stavy směsi plyn – pára je dána vzájemným poměrem fáze kapalné a fáze plynné při konkrétních teplotách, nejčastěji při bodu varu. Termodynamika např. vodní páry se používá v teplárenství.

Základní rovnice hydromechaniky určíme na základě rovnováhy sil. Jaké síly působí na elementární objem, taková bude výsledná rovnice. Rozdělujeme tedy rovnice pro statiku tekutin, kdy je tekutina v klidu (Eulerova rovnice hydrostatiky) a rovnice pro dynamiku tekutin, kdy jsou tekutiny v pohybu (Eulerova rovnice hydrodynamiky, Navierova - Stokesova rovnice, rovnice kontinuity a Bernoulliho rovnice).

Statika jednoho a dvou plynů v nádobě závisí na hustotě plynu v nádobě a na hustotě plynu okolního prostředí. Za určitých situací tak vzniká přetlak, resp. podtlak v nádobě, ve které se plyn nachází. Příkladem využití může být pracovní prostor pece.

Proudění ideální tekutiny může být vířivé nebo nevířivé. **Proudění skutečné tekutiny** může být laminární, nebo turbulentní. Proudění (stejně jako ostatní děje) může být ustálené (stacionární), nebo neustálené (nestacionární); jednorozměrné, dvourozměrné (2-D) nebo třírozměrné (3-D).

Laminární a turbulentní proudění rozlišujeme podle Reynoldsova kritéria. Reynoldsovo kritériu nám udává poměr sil setrvačných a vazkých dané tekutiny.

Hydraulické ztráty tlaku vznikají při proudění skutečných tekutin v trubkách, kanálech, potrubích apod. Celkové hydraulické ztráty jsou dány ztrátami třecím, ztrátami místními odpory a ztrátami vztlaku.

Třecí ztráty jsou závislé na délce potrubí, průřezu potrubí a rychlosti tekutiny v potrubí. Důležitou veličinou je součinitel třecí ztráty, který je závislý na drsnosti potrubí, průměru potrubí, Reynoldsově kritériu. Dle velikosti Reynoldsova kritéria se velikost součinitele třecí ztráty mění.

Místní ztráta je dána geometrií potrubí. Důležitou veličinou je součinitel místní ztráty je charakteristický pro každou ztrátu a nalezneme jej v tabulkách.

Vztlaková ztráta vzniká jen v horizontálních potrubích a závislá na směru proudění tekutiny uvnitř potrubí.

Kromě tlakových ztrát v potrubí a kanálech, vznikají tlakové ztráty u **komína**, nebo u výtoku plynů otvory při určitých rychlostech (například výtok plynu stěnou – nízké rychlosti, nebo výtok plynu přes trysky – vysoké rychlosti) Typickým příkladem proudění tekutin při vysokých rychlostech jsou jednoduchá **tryska** a **Lavalova tryska**.

Konvekce se uskutečňuje v proudicím prostředí, kde zároveň dochází k výměně tepla. Konvekce představuje zároveň vedení tepla a proudění tekutiny, proto hovoříme o kondukčně – konvekčním přestupu tepla.

Rozlišujeme **přirozenou** a **nucenou konvekci**, dle charakteru proudění. Přirozená konvekce je vyvolaná vlivem gravitačního zrychlení na nerovnoměrně prohřátou tekutinu, nucená konvekce je vyvolána externím zásahem- například ventilátorem.

Přestup tepla při konvekci je dán **součinitelem přestupu tepla** α_{kon} , jenž charakterizuje prostředí. Hodnoty součinitele se pohybují v různých mezích dle daného děje. Nabývá hodnot od jednotek po $100\,000\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. Součinitel přestupu tepla konvekcí určujeme na základě Nusseltova kritéria a příslušných kritériálních rovnic.

Teplotní pole proudící tekutiny popisuje **Fourierova – Kirchhoffova rovnice**.

**Otázky ke kapitole 3**

40. Vyjmenujte základní fyzikální veličiny a jejich jednotky.
41. Co nazýváme geometrickým tlakem?
42. Rozlište pojmy přetlak a podtlak.
43. Jak určíme celkový tlak v tekutinách?
44. Vyjmenujte základní plynové zákony pro ideální plyn.
45. Jak určíme měrnou plynovou konstantu? A jak se liší od molární plynové konstanty?
46. Rozdíl mezi rozpínavostí, roztažností a stlačitelností.
47. Jaké látky jsou nestlačitelné?
48. Popiš rozdíl mezi kinematickou viskozitou a viskozitou dynamickou.
49. Co je to tečné napětí?
50. Jak se projevuje povrchové napětí v interakci s různým prostředím?
51. Popište termodynamické stavy směsi plyn – pára.
52. Jaký je rozdíl mezi hydrodynamikou a hydrostatikou.
53. Napište základní rovnici pro rovnováhu sil při proudění tekutin.
54. Jaké jsou podmínky rovnováhy sil pro Eulerovu rovnici hydrostatiky a Eulerovu rovnici hydrodynamiky.
55. Odvoďte si obě rovnice Eulerovy a zdůvodněte v čem je jejich rozdíl.
56. Popište postup odvození rovnice kontinuity.
57. Kde využijeme rovnici kontinuity?
58. Popište postup odvození rovnice Navierovy – Stokesovy.
59. Bernoulliho rovnici vyjádřete jak pomocí tlaků, tak pomocí výšek.
60. Co nám říká Pascalův zákon?
61. Popište situaci, kde se vyskytuje hydrostatické paradoxon.
62. Princip Archimédova zákona. Popište situace, které mohou nastat.

63. Jak je ovlivněn tlak v nádobě, která je otevřená zdola a shora.
64. Jak rozdělujeme způsoby proudění tekutin?
65. Co nazýváme laminárním prouděním?
66. Popište příklad laminárního proudění v trubce.
67. Co je to turbulentní proudění?
68. Popište rozdíl mezi laminárním a turbulentním prouděním z hlediska Re kritéria.
69. Co vystihuje Reynoldsovo kritérium?
70. Jak určíme rychlost u turbulentního proudění?
71. Co je to hydraulický průměr? Jak ho matematicky určíme?
72. Jaké znáte typy ztrát tlaku při proudění tekutin.
73. Na čem je závislá tlaková ztráta třením?
74. Jak určíme hodnotu součinitele třecí ztráty?
75. Co popisuje Blasiova přímka?
76. Co vyjadřuje pojem „hydraulicky hladké potrubí“?
77. Jak proudění tekutin souvisí s drsností povrchu?
78. Vyjmenujte a stručně popište jednotlivé druhy drsností povrchů.
79. Popište určení hydraulického průměru a součinitele třecí ztráty pro nekruhová potrubí.
80. Jak určíme místní tlakové ztráty?
81. Uveďte 3 příklady místní tlakové ztráty.
82. Ztráta vztlakem – popište vzájemné působení tekutiny a okolního prostředí a jeho vliv na hydraulické ztráty.
83. Jak určíme celkové hydraulické ztráty.
84. V čem spočívá princip komínu.
85. Jak vypočteme výšku komínu?
86. Popište situaci vytékání tekutiny otvorem ve stěně.

87. Jaký je rozdíl mezi tryskou jednoduchou a Lavalovou?
88. Kdy hovoříme o nadzvukovém proudění?
89. Jak se zvuk šíří materiály?
90. Popiš rozdíl mezi přirozenou a nucenou konvekcí.
91. Jak určíme součinitel přestupu tepla konvekcí?
92. Napište základní kritéria pro určení součinitele přestupu tepla konvekcí. Vysvětlete jejich funkci.
93. Co je to kritériální rovnice?
94. Co je to kritérium a jak ho určíme?
95. Jak se mezi sebou liší Fourierova rovnice vedení tepla a Fourierova – Kirchhoffova rovnice?



Pojmy k zapamatování

Každý fyzikální děj (proces, jev) může být popsán **úplnou fyzikální rovnicí**, nebo rovnicemi (např. diferenciálními). Úplná fyzikální rovnice bere v úvahu všechny závislosti mezi relevantními veličinami (veličiny, které mají v daném procesu rozhodující význam) spolu s podmínkami jednoznačnosti (jak bylo řečeno v kapitole o vedení). Ne vždy však je toto postačující a vede to k jasnému definování úlohy a jejímu následnému řešení. Ve složitých případech volíme cestu experimentu (nebo numerického modelování – viz kapitole 5, dále). Na základě experimentu se hledá empirická závislost mezi jednotlivými veličinami, popisující daný proces. Takový empirický vztah platí pouze pro podmínky, při kterých experiment proběhl a nelze jej použít pro děj jiný.

K popisu fyzikálního děje, pro který neznáme úplnou fyzikální rovnici, se používá **kritériální rovnice**. Kritériální rovnice v sobě obsahuje všechny relevantní veličiny pro daný proces. Veličiny jsou ve vzájemných funkčních závislostech a to ve formě **kritérií podobnosti**. Kritérium podobnosti je bezrozměrný výraz složený z různých

veličin (např. rychlost, délka apod.). Kritérium podobnosti určíme na základě **teorie podobnosti**.

Pokud je několik systémů navzájem podobných, můžeme popsat jen jeden z nich. K popisu ostatních podobných systémů pak stačí použití jen jednoduchých matematických operací (např. násobení) na základě vhodných definic. To, zda-li jsou si systémy podobné, částečně podobné, nebo nepodobné se dá určit na základě kritérií podobnosti. Pokud jsou všechna podstatná kritéria podobnosti dvou systémů stejná, jsou systémy podobné. Pokud se liší málo, jsou podobná do určité míry. Pokud se systémy výrazně liší v hodnotách jednoho nebo více kritérií jsou si systémy nepodobné (nebo zcela nepodobné).

Poznatky získané v nějakém systému lze bez problémů aplikovat na jiný systém pouze v případě, kdy jsou systémy navzájem podobné, nebo výjimečně, když jsou částečně podobné.

Dle teorie podobnosti pak musíme určit kolik a jakých kritérií podobnosti pro daný systém (děj, proces, jev) použít. Kritériální rovnici lze odvodit na základě rozměrové (dimenzionální) analýzy a na základě analýzy základních rovnic.

Rozměrová analýza pracuje se všemi vstupními veličinami a jejich rozměry pro daný děj (proces). Dovoluje určit počet kritérií bez ohledu na znalost úplné fyzikální rovnice.

Analýza základních rovnic k určení kritériální rovnice potřebuje přesnou matematickou formulaci děje.

Typy podobností:

Geometrická podobnost – je podobnost úhlů v daném n -úhelníku. Např. dva systémy (1 a 2) jsou si podobné, jsou – li si podobné jejich délky. Délka l_2 je násobkem délky l_1 , tedy $l_2 = c_l \cdot l_1$, kde c_l se nazývá **konstantou podobnosti** veličiny l (délky). Konstanta podobnosti je bezrozměrné číslo. Je to poměr bezrozměrných veličin, vyjadřující jejich úměrnost v daných bodech soustav(y).

Kinematická podobnost – je podobnost pohybů. Dva systémy (1 a 2) jsou si podobné, jsou – li si podobné jejich rychlosti, nebo zrychlení v homologických

(geometricky stejných) bodech. Jsou-li rychlost v_1 v systému 1 a rychlost v_2 v systému 2 rovnoběžné, jsou poměry rychlostí konstantní $\frac{v_2}{v_1} = c_v$. Kde c_v se nazývá konstantou podobnosti veličiny v (rychlosti).

Dynamická podobnost – je podobnost sil. U dynamické podobnosti se předpokládá geometrická a kinematická podobnost.

Tepelná podobnost – je podobnost teplot a tepelných toků.

4. SDÍLENÍ TEPLA ZÁŘENÍM



Čas ke studiu: 8 hodin



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat podstatu záření a vysvětlit rozdíl mezi vlnovou a korpuskulární teorií chování světla,
- popsat pojem kvantum energie,
- určit jednotlivé složky elektromagnetického spektra, včetně vlnové délky a frekvence,
- vysvětlit, co je to černé těleso, kde se používá a proč se používá,
- popsat, co je to zářivý tok, intenzita vyzařování, směrová intenzita vyzařování, plošná zářivost,
- vysvětlit a objasnit co jsou to radiální vlastnosti tělesa, co je to emisivita,
- definovat základní zákony pro sdílení tepla zářením – Planckův zákon, Wienův zákon, Stefanův – Boltzmannův zákon, Lambertův zákon a Kirchhoffův zákon.
- definovat a určit, jak probíhá záření mezi dvěma tělesy a vyjádřit zářivý tok mezi dvěma tělesy,
- popsat, jak probíhá záření plynů samostatně a záření plynů v interakci s tuhým tělesem.



Výklad

Sílení tepla zářením (radiace, sálání) je třetím typem přenosu tepla. Na rozdíl od předchozích popsaných dvou typů sdílení tepla, není sdílení tepla zářením vázáno na hmotné prostředí, to znamená, že záření se může uskutečňovat i ve vakuu. Vedení tepla i konvekce je vázáno na existenci hmotného prostředí – probíhá v tuhých, kapalných, nebo plynných látkách. Nicméně v běžném životě a situacích se setkáváme se všemi třemi druhy sdílení tepla dohromady, aniž bychom si tuto skutečnost nějak zásadně uvědomovali. Všechny tři typy jsou poměrově zastoupeny. Mohou nastat situace, kdy jedna ze složek je dominantní a určující pro probíhající děj; nebo jiná složka je zanedbatelná a na probíhající děj nemá podstatný/zásadní vliv.

K důkladnému pochopení sdílení tepla zářením je třeba znát kromě klasické fyziky a termo(hydro)mechaniky také kvantovou fyziku/mechaniku, nicméně v dalším textu se omezíme na jednoduchý a srozumitelný popis podstaty záření.

4.1. Podstata záření a teorie

Přenos energie při sdílení tepla zářením se uskutečňuje elektromagnetickým vlněním, které se šíří rychlostí světla. Rozlišujeme dvě teorie chování světla – vlnová teorie a korpuskulární teorie, tedy světlo má *vlnově – částicovou povahu* (dualismus světla). Za jistých okolností lze světlo popsat klasickou **elektromagnetickou teorií** (vlnovou/Maxwellovou), tedy šíření světla, lom světla, odraz, ohyb, apod., v jiných případech je nutné použít **kvantovou** (korpuskulární) **teorii** (interakce světla s látkou, laser, apod.). **Světlo** je elektromagnetické vlnění v rozmezí vlnových délek 390 až 760 nm.

Při **elektromagnetické (vlnové) teorii** se světlo řídí zákony vlnové optiky. Světlo má charakter vlny a rychlost světla lze ji matematicky vyjádřit jako součin frekvence f (Hz) a vlnové délky λ (m), tedy

$$c = f \cdot \lambda$$

Rychlost světla ve vakuu $c = 2,9979 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pomocí této teorie lze vysvětlit tyto známé pojmy – interference, difrakce, polarizace.

Kvantová teorie zavádí pojem energetického kvanta, které je atomy vyzařováno, nebo pohlcováno. Max Planck vyslovil předpoklad, že záření vydávané nebo pohlcované nemůže mít libovolnou energii, ale vždy je vyzařováno, nebo pohlcováno v určitých dávkách – **kvantech**. Energie záření je úměrná frekvenci f a konstantě úměrnosti h , tedy

$$Q = h \cdot f \quad (\text{J}),$$

kde h je Planckova konstanta $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. Kvantum elektromagnetického pole, které může být vyzářeno, nebo pohlceno se nazývá **foton**. Fotony se chovají jako částice, šíří se rychlostí světla, jejich hmotnost je vyjádřena vztahem $m = \frac{Q}{c^2} = \frac{h \cdot f}{c^2}$ a hybnost

$$p = m \cdot c = \frac{Q}{c} = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h}{\lambda}. \text{ Čím kratší vlnovou délku má elektromagnetická vlna, tím}$$

výraznější částicové (kvantové) chování u ní pozorujeme. Vyzařovaná energie je tím větší,

čím větší je frekvence, nebo čím menší se vlnová délka. Nejznámější aplikací kvantové teorie světla je *fotoelektrický jev* – při vzájemném působení elektromagnetického záření a materiálu (např. kovu) dochází k uvolňování elektronů. Elektrony buď vystupují z látky (fotoemise), nebo přecházejí na vyšší energetickou hladinu. Tohoto jevu se využívá např. v polovodičových součástkách.

Elektromagnetické záření vydávají všechna tělesa. Elektromagnetické záření se dělí na několik druhů podle vlnových délek, resp. frekvence (Hz), jak uvádí tabulka **TSAL01**.

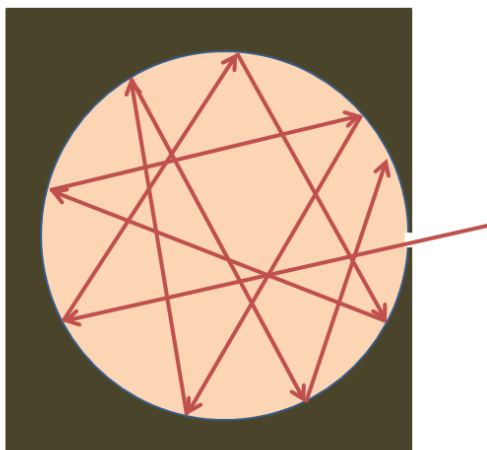
Tabulka **TSAL01**. Spektrum elektromagnetického záření.

typ elektromagnetického záření	rozsah f (Hz), λ (m)	poznámka
γ - záření	kratší než 124 pm (2,42 EHz)	Fotoelektrický jev, Comptonův jev, Lekselův gamma nůž, hubení bakterií ve vodě.
Rentgenové záření (X-rays)	100 pm až 10 nm (10^{17} až 10^{20} Hz)	Tomografie a denzitografie, diagnostika materiálů. CT.
Ultrafialové záření (UV záření)	NUV: 400-200 nm UVA: 400-320 nm UVB: 320-280 nm UVC: pod 280 nm DUV: pod 300 nm FUV, VUV: 200-10 nm EUV, XUV: 31-1 nm (10^{15} až 10^{17} Hz)	Svítidla, výbojky, desinfekce prostorů, spektroskopie, detektory, laserové technologie, soudní znaleství
Viditelné záření (světelné)	Červená: 625-740 nm Oranžová: 590-625 nm Žlutá: 565-590 nm Zelená: 520-565 nm Azurová: 500-520 nm Modrá: 430-500 nm Fialová: 380-430 nm (480 až 700 THz)	LCD – monitory a obrazovky, DVD – přehrávače, svařování
Infračervené záření (IR záření)	NIR: 0,76-1,4 μm SWIR: 1,3-3 μm MWIR: 3-8 μm LWIR: 8-15 μm FIR: 10-1000 μm (1 mm) (300 GHz až 400 THz)	Telekomunikační pásma: O-pásmo: 1,260-1,360 μm E-pásmo: 1,36-1,46 μm S-pásmo: 1,46-1,53 μm C-pásmo: 1,53-1,565 μm L-pásmo: 1,565-1,625 μm U-pásmo: 1,625-1,675 μm

Tepelné záření	8-12 μm	ohřevy
mikrovlny	EHF: 30-300 GHz (10-1 mm) SHF: 3-30 GHz (100-10 mm)	Vysokorychlostní přenos dat. Mikrovlnná zařízení, WiFi, radar
Rozhlasové vlny	UHF: 300-3000 MHz	Televizní vysílání, mobilní telefony, WiFi, komunikace země-země, vzduch-vzduch.
	VHF: 30-300 MHz	FM – rádiové vlny, televizní vysílání
	HF: 3-30 MHz	Krátkovlnné vysílání
	MF: 300-3000 kHz	AM vysílání (střední vlny)
	LF: 30-300 kHz	AM vysílání (dlouhé vlny), navigace, časové signály.
	VLF: 3-30 kHz	Komunikace s ponorkami, měřiče pulsu
	ULF: 300-3000 Hz	Komunikace v dolech
	SLF: 30-300 Hz ELF: 3-30 Hz	Komunikace s ponorkami

Pro sdílení tepla záření je rozhodující elektromagnetické záření v rozsahu vlnových délek 10^{-4} až 10^{-7} m, tedy záření ultrafialové, tepelné (infračervené) a záření viditelné (světelné).

Množství vysálané energie závisí na teplotě tělesa. Těleso, které při dané teplotě vyzařuje (pohlcuje) na každé vlnové délce maximálně možné množství sálavé energie se nazývá **černé těleso**. V absolutně černém tělesu je v rovnováze vyzařování a pohlcování záření, nezávisí na chemickém složení tělesa, ale jen na jeho teplotě. Černé těleso ve skutečnosti neexistuje, lze si jej představit jako zařízení s dutou koulí s velmi malým otvorem (obr. SAL01). Energie (paprsek) vstupující otvorem do prostoru koule je v této kouli zcela pohlcen.



Obr. SAL01. K vysvětlení pojmu černého tělesa.

Protože černé těleso ve skutečnosti neexistuje, byl zaveden pojem **šedého tělesa**. Záření šedého tělesa při stejné teplotě a v rozsahu vlnových délek je menší než záření černého tělesa.

4.2. Základní pojmy

Celkové množství energie vyzářené tělesem do poloprostoru za jednotkový čas se nazývá **zářivý** (sálavý, radiační) **tok** P (W). Zářivý tok vztažený na jednotku povrchu tělesa je **intenzita vyzařování** E a představuje hustotu tepelného toku

$$E = \frac{dP}{dS} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}).$$

Směrová intenzita vyzařování I představuje množství energie, vyzářené v určitém směru z elementární plochy dS do elementárního prostorového úhlu $d\omega$ za jednotku času. Je-li směr odkloněn od normály n k plošce dS o úhel φ , pak směrová intenzita vyzařování je dána rovnicí

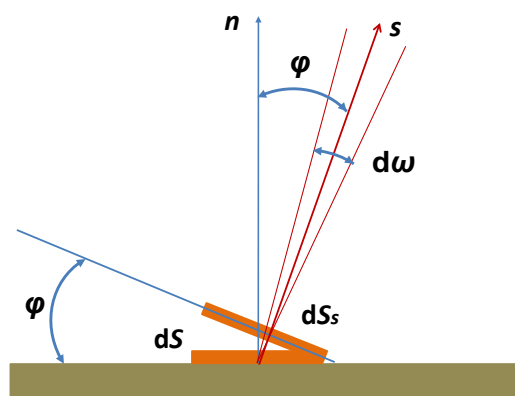
$$I_{\varphi} = \frac{dE_{\varphi}}{d\omega} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}),$$

kde E_{φ} je intenzita vyzařování ve směru s . A platí $E = \int_{2\pi} dE_{\varphi}$.

Plošná zářivost L se vyjadřuje jako směrová intenzita vyzařování I , je ale vztažena k elementární plošce dS_s , která je průmětem dS na rovinu kolmou ke směru s (viz obr. SAL02), tedy

$$L_\varphi = \frac{I_\varphi}{\cos \varphi} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}).$$

Plošná zářivost se může měnit pro různé části zářícího povrchu a pro různé směry záření. Záření, jehož plošná zářivost je pro všechny místa a směry stejná se nazývá *difúzní záření*.



Obr. SAL02. K objasnění směrové intenzity vyzařování a plošné zářivosti.

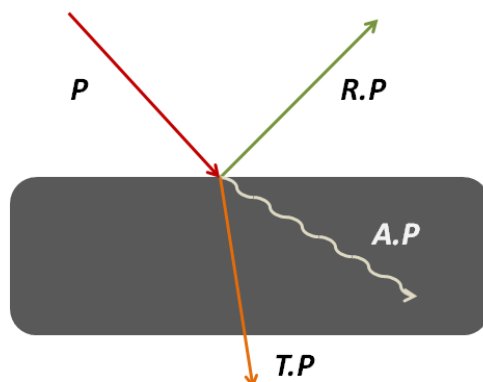
Integrální veličiny jsou veličiny vztažené na celou oblast spektra, **Spektrální veličiny** jsou vztaženy jen na určitou část spektra. **Spektrální veličiny** jsou derivacemi integrálních veličin, a proto mají jiný fyzikální rozměr a obvykle se označují dolním indexem λ .

4.3. Radiační vlastnosti

Záření dopadající na povrch tělesa se povrchem z části pohlcuje, z části odráží, nebo se část záření propustí. Propustnost lze také nazvat průteplivostí. Celková suma dopadajícího zářivého toku P je tak rozdělena do tří složek, jež dohromady musí dát 100 %, tedy

$$\begin{aligned} P &= A \cdot P + R \cdot P + T \cdot P \\ A + R + T &= 1 \end{aligned}$$

kde A je pohltivost, R je odrazivost a T je propustnost, jak je vidět na obr. SAL04.



Obr. SAL04. Radiační vlastnosti.

Tuhé látky (kovové i nekovové) tepelné záření nepropouští $T = 0 \dots A + R = 1$. Pro černé těleso platí, že veškeré dopadající záření je pohlceno $T + R = 0 \dots A = 1$. Ostatní látky (materiály) jsou kombinací jednotlivých radiačních vlastností.

Neméně důležitou radiační vlastností je **emisivita ε** (poměrná pohltivost). Emisivita se určuje jako poměr intenzity vyzařování E tělesa k intenzitě vyzařování černého tělesa E_0 při stejné teplotě, tedy

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0} = \frac{E}{\sigma \cdot T^4} \quad (1).$$

Černé těleso, jak již bylo řečeno, vyzařuje maximální množství energie. Emisivita černého tělesa je rovna jedné. Protože černé těleso neexistuje, ale jsou tělesa šedá, žádné jiné těleso nemůže mít $\varepsilon = 1$. Šedá tělesa se mohou hodnotě 1 pouze přiblížit. Šedá tělesa mají emisivitu v intervalu $\varepsilon \in (0,1)$. Šedý povrch tedy část záření pohltí a část záření odrazí. Hodnota ε závisí na povrchu materiálu, je funkcí teploty a může tak svou hodnotu měnit. V následující tabulce TSAL02 jsou uvedeny hodnoty emisivity pro různé materiály.

Tabulka TSAL02. Přehled hodnot emisivity různých materiálů.

Materiál	Emisivita (1)
Hliník (Al) nezoxidovaný povrch (100 °C)	0,03
Hliník (Al) zoxidovaný povrch (599 °C)	0,19
Mosaz, leštěná, 73% Cu, 27% Zn (357 °C)	0,03
Mosaz zoxidovaný povrch (600 °C)	0,61

Uhlíkové vlákno (260 °C)	0,95
Měď, oxidovaný povrch, tmavý (38 °C)	0,78
Měď, vysoce leštěný povrch (38 °C)	0,02
Zlato, leštěný povrch (538-1093 °C)	0,03
Železo se rží na povrchu (25 °C)	0,60
Železo, tavenina, tekutý stav	0,29
Nikl, leštěný (38 °C)	0,05
Nikl, neoxidovaný povrch (1000 °C)	0,19
Stříbro, leštěný povrch (1000 °C)	0,03
Ocel, neoxidovaný povrch (100 °C)	0,08
Ocel, zoxidovaný povrch (25 °C)	0,80
Cihla, nepálená (20 °C)	0,90
Cihla, červená (20 °C)	0,93
Cihla, šamotová (1371 °C)	0,75
Jíl (hlína) (20 °C)	0,39
Cement (hrubozrnný) (0-1093°C)	0,94
Látka bavlněná (20 °C)	0,77
Žula (20 °C)	0,45
Štěrk (38°C)	0,28
Vápenná malta (38-260 °C)	0,90-0,92
Mramor šedý (38°C)	0,75
Křemenné sklo 1,98 mm (838 °C)	0,41
Guma tvrdá (23 °C)	0,94
Písek (20 °C)	0,76
Břidlice (20 °C)	0,69
Půda (38°C)	0,38
Saze (20 °C)	0,95
Dřevo dubové (38 °C)	0,91

Pohltivost A , odrazivost R , propustnost T a emisivita ε se vztahují k celé oblasti spektra, jsou to tedy veličiny integrální. Kromě toho mohou existovat i veličiny spektrální, které se týkají pouze určité vlnové délky. Proto platí obdobná rovnice jako u integrálních veličin, tedy

$$A_\lambda + R_\lambda + T_\lambda = 1 \quad (1)$$

a

$$\varepsilon_\lambda = \frac{E_\lambda}{E_{0,\lambda}} \quad (1)$$

Vzájemná souvislost mezi integrální a spektrální pohltivostí je dána

$$A = \frac{\int_0^\infty A_\lambda \cdot q_\lambda \cdot d\lambda}{\int_0^\infty q_\lambda \cdot d\lambda} \quad (1),$$

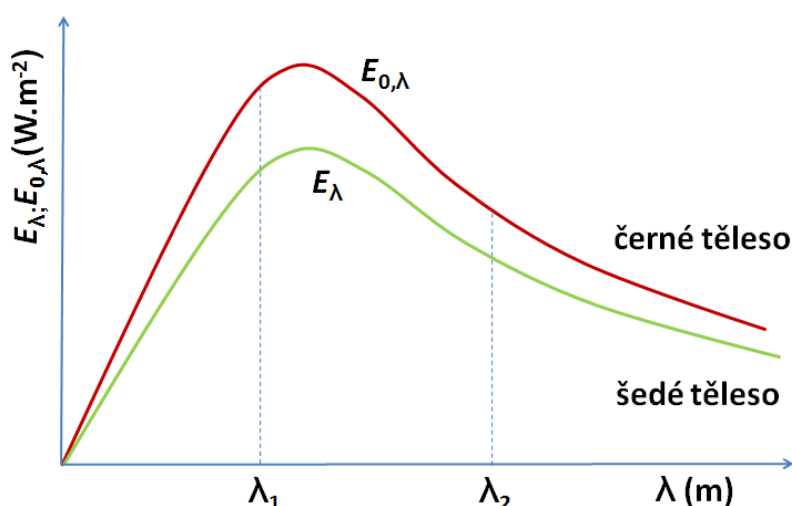
kde q_λ je hustota dopadajícího spektrálního zářivého toku pro vlnovou délku λ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$).

Po integrální a spektrální emisivitu platí vztah

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda \cdot E_{0,\lambda} \cdot d\lambda}{\int_0^\infty E_{0,\lambda} \cdot d\lambda} = \frac{1}{\sigma \cdot T^4} \int_0^\infty \varepsilon_\lambda \cdot E_{0,\lambda} \cdot d\lambda \quad (1)$$

Poslední dvě rovnice naznačují rozdíl mezi integrální emisivitou a integrální pohltivostí. Integrální emisivita je závislá na vlastnostech a teplotě daného tělesa. Integrální pohltivost závisí na teplotě a vlastnostech daného tělesa plus závisí na vlastnostech a teplotě okolních těles, protože je funkcí q_λ .

Porovnáme-li spektrální intenzity záření černého a šedého tělesa na vlnové délce při shodné teplotě obou těles vidíme, že záření šedého tělesa je, v celém rozsahu vlnových délek, nižší – viz obr. **SAL05**.



Obr. SAL05. K objasnění černého a šedého tělesa.

Poměr spektrální intenzity záření šedého tělesa E_λ a spektrální intenzity záření černého tělesa $E_{0,\lambda}$ je na všech vlnových délkách shodný, tedy

$$\frac{E_{\lambda_1}}{E_{0,\lambda_1}} = \frac{E_{\lambda_2}}{E_{0,\lambda_2}} = \frac{E_\lambda}{E_{0,\lambda}} = \varepsilon_{\lambda,1} = \varepsilon_{\lambda,2} = \varepsilon_\lambda \quad (1)$$

Spektrální emisivita šedého tělesa nezávisí na vlnové délce, je v celém rozsahu vlnových délek konstantní. Což znamená, že u šedého tělesa je spektrální emisivita rovna emisivitě integrální. A zároveň jsou i další spektrální veličiny, při dané teplotě, rovny veličinám integrálním. Tedy

$$\varepsilon = \varepsilon_\lambda \quad A = A_\lambda \quad R = R_\lambda \quad T = T_\lambda .$$

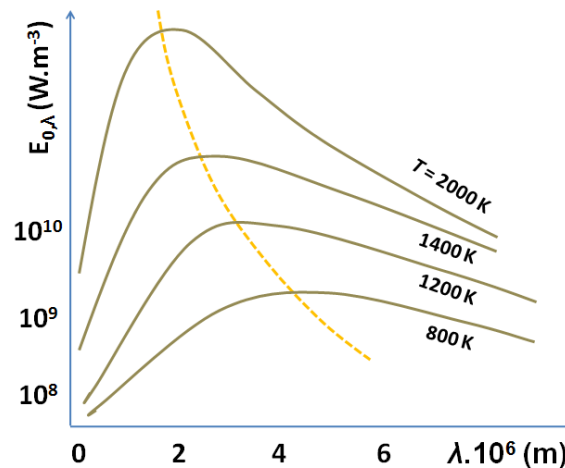
4.4. Základní zákony

Planckův zákon. Intenzita vyzařování (spektrální) černého tělesa je závislá na vlnové délce a teplotě

$$E_{0,\lambda} = \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot \left(e^{\frac{c_2}{\lambda \cdot T}} - 1 \right)} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-3}), \quad c_1 = 3,7412 \cdot 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}, \quad c_2 = 1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K},$$

kde konstanty c_1 a c_2 jsou funkcemi rychlostí světla ve vakuu, Planckovy konstanty h a Stefanovy – Boltzmannovy konstanty σ . Grafické znázornění Planckova zákona je na

obr. SAL03. Z obrázku je patrné, že intenzita vyzařování dokonale černého tělesa konverguje pro malé i velké vlnové délky k nule. S rostoucí teplotou hodnota intenzity vyzařování se zvyšuje.



Obr. SAL03 K objasnění Planckova zákona a Wienova zákona.

Wienův zákon. Wienův zákon vychází z Planckova zákona. Pro každou teplotu T má funkce $E_{0,\lambda} = f(\lambda)$ maximum. S rostoucí teplotou se toto maximum posouvá ke kratším vlnovým délkám, jak je patrné z obr. SAL03 – žlutá přerušovaná křivka. Matematické vyjádření Wienova *posunovacího* zákona vychází z rovnice Planckova zákona a má následující tvar

$$\lambda_{\max} \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} \quad (\text{m} \cdot \text{K}),$$

kde λ_{\max} je vlnová délka, při které je intenzita vyzařování *maximální*. Velikost intenzity vyzařování určíme z následující rovnice

$$E_{0,\lambda,\max} = 1,286 \cdot 10^{-5} \cdot T^5 \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-3}).$$

Stefanův – Boltzmannův zákon. Integrální intenzita vyzařování černého tělesa je úměrná čtvrté mocnině termodynamické teploty. Matematický výraz je

$$E_0 = \sigma \cdot T^4 \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}) \quad \sigma = \frac{c_1 \cdot \pi^4}{c_2^4 \cdot 15} = \frac{3,7415 \cdot 10^{-16} \cdot \pi^4}{(1,4388 \cdot 10^{-2})^4 \cdot 15} = 5,67 \cdot 10^{-8} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}),$$

kde σ je **Stefanova – Boltzmannova konstanta**. V praxi se používá upraveného vztahu

$$E_0 = C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}),$$

kde C_0 je **součinitel vyzařování dokonale černého tělesa**. $C_0 = 5,67 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$. Stefanův – Boltzmannův zákon určuje celkové záření povrchu tělesa do všech směrů poloprostoru.

Pro záření šedých těles platí následující výraz

$$E = \varepsilon \cdot E_0 = \varepsilon \cdot C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}).$$

Lambertův zákon. Lambertův, neboli *kosinový* zákon, popisuje vyzařování energie do jednotlivých směrů poloprostoru. Směrová intenzita vyzařování černého tělesa $I_{0,\varphi}$ je dána součinem směrové intenzity ve směru normály k povrchu $I_{0,n}$ a kosinem úhlu φ mezi příslušným směrem a normálou, tedy

$$I_{0,\varphi} = I_{0,n} \cdot \cos \varphi \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1}).$$

Dosadíme-li $I_{0,\varphi}$ do rovnice pro plošnou zářivost pro černé těleso dostaneme následující výraz

$$L_{0,\varphi} = \frac{I_{0,n} \cdot \cos \varphi}{\cos \varphi} = I_{0,n} = L_{0,n} = \text{konst} = L_0$$

Z této rovnice vyplývá, že plošná zářivost v libovolném směru L_φ je rovna plošné zářivosti ve směru normály L_n .

$$I_{0,\varphi} = L_0 \cdot \cos \varphi$$

Lambertův zákon lze použít pro difúzně sálající tělesa a platí rovněž pro tělesa šedá.

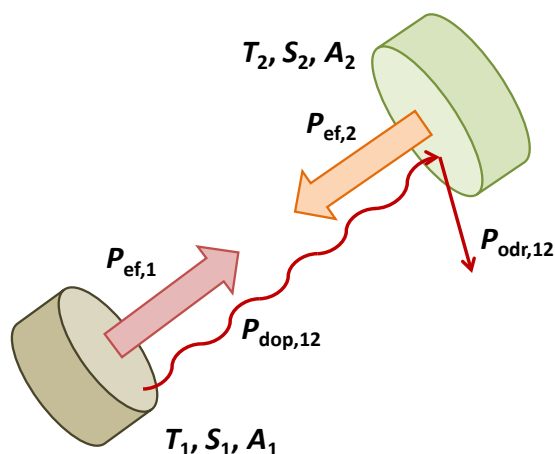
Kirchhoffův zákon. Kirchhoffův zákon popisuje vzájemnou závislost mezi emisivitou a pohltivostí těles. Při tepelné rovnováze je pohltivost tělesa rovna jeho emisivitě. Platí vztah

$$A = \varepsilon = \frac{E}{E_0} = \frac{E}{\sigma \cdot T^4} \quad (1)$$

Tento výraz platí jak pro černé těleso, tak pro tělesa šedá, neboli skutečná. Rovnost $A = \varepsilon$ platí také, když šedé těleso není v tepelné rovnováze s okolím. Integrální pohltivost šedého tělesa se vždy rovná integrální emisivitě. Při změně teploty šedého tělesa se emisivita a pohltivost může změnit, stále však platí $A = \varepsilon$.

4.5. Záření mezi povrchy šedých těles

Máme-li dvě šedá tělesa, různých teplot, která vysílají pouze zářivou energii, zajímá nás, jak velká bude mezi nimi výměna tepla, jaký bude tepelný tok. Na základě předchozích znalostí odvodíme tepelný tok, který vysílá těleso 1 na těleso 2, předpokládáme-li, že těleso 1 má vyšší teplotu, než těleso 2. Situace je na obr. SAL06.



Obr. SAL06. Výměna tepla mezi dvěma šedými tělesy.

Efektivní zářivý tok P_{ef} je dán součtem vlastního zářivého toku P_{vl} a odraženého zářivého toku P_{odr} , tedy

$$P_{ef} = P_{vl} + P_{odr} = \varepsilon \cdot C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \cdot S + P_{odr} \quad (\text{W})$$

Výsledný zářivý tok $P_{výsl}$ je dán rozdílem vlastního zářivého toku P_{vl} a pohlceného záření P_{pohl} , tedy

$$P_{výsl} = P_{vl} - P_{pohl} = \varepsilon \cdot C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \cdot S - A \cdot P_{dop} = \varepsilon \cdot C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \cdot S - A \cdot (P_{odr} + P_{pohl}) \quad (\text{W}).$$

Po matematické úpravě těchto dvou rovnic (odečtení) je výsledný zářivý tok $P_{výsl}$ roven rozdílu efektivního zářivého toku P_{ef} a dopadajícího zářivého toku P_{dop}

$$P_{výsl} = P_{ef} - P_{dop} \quad (\text{W})$$

Eliminujeme-li dopadající zářivý tok P_{dop} pak obdržíme tvar pro efektivní zářivý tok P_{ef}

$$P_{\text{ef}} = \frac{\varepsilon}{A} \cdot C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \cdot S - P_{\text{výsl}} \cdot \left(\frac{1}{A} - 1\right) \quad (\text{W}), \text{ pro šedé těleso platí } \varepsilon = A \dots \text{ rovnice má tvar}$$

$$P_{\text{ef}} = C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \cdot S - P_{\text{výsl}} \cdot \left(\frac{1}{A} - 1\right) \quad (\text{W}).$$

Vztáhneme-li tyto závěry k situaci na obr. **SAL06**, pak pro obě tělesa – 1 a 2 – platí následující rovnice

$$P_{\text{ef},1} = C_0 \cdot \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 \cdot S_1 - P_{\text{výsl},1} \cdot \left(\frac{1}{A_1} - 1\right) \quad (\text{W})$$

$$P_{\text{ef},2} = C_0 \cdot \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \cdot S_2 - P_{\text{výsl},2} \cdot \left(\frac{1}{A_2} - 1\right) \quad (\text{W})$$

Pokud tělesa navzájem září tak, že září pouze „jeden na druhý“, lze napsat, že

$$P_{\text{výsl},1} = -P_{\text{výsl},2} = P_{12},$$

kde P_{12} je **výsledný zářivý tok** mezi tělesem 1 a tělesem 2, neboli z tělesa 1 na těleso 2.

Z celkového efektivního zářivého toku dopadá z povrchu tělesa 1 na těleso 2 pouze určitá část

– $P_{\text{dop},12}$. Poměr $\frac{P_{\text{dop},12}}{P_{\text{ef},1}} = \bar{\varphi}_{12}$, kde $\bar{\varphi}_{12}$ je **střední index směrovosti**. Analogicky platí pro

opačný směr $\frac{P_{\text{dop},21}}{P_{\text{ef},2}} = \bar{\varphi}_{21}$. Je-li soustava v termodynamické rovnováze, to znamená, že

$T_1 = T_2$, pak platí $P_{\text{dopad},12} = P_{\text{dopad},21}$ a $P_{\text{výsl},1} = P_{\text{výsl},2} = 0$, pak pro efektivní zářivé toky pro obě tělesa platí

$$P_{\text{ef},1} = C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \cdot S_1 \quad (\text{W})$$

$$P_{\text{ef},2} = C_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 \cdot S_2 \quad (\text{W})$$

Po dosazení za efektivní zářivé toky dojdeme k výrazu $\bar{\varphi}_{12} \cdot S_1 = \bar{\varphi}_{21} \cdot S_2$.

Není-li soustava v termodynamické rovnováze, pak platí

$$P_{\text{dopad},12} - P_{\text{dopad},21} = P_{\text{ef},1} \cdot \bar{\varphi}_{12} - P_{\text{ef},2} \cdot \bar{\varphi}_{21} = P_{12}$$

Po dosazení za efektivní zářivé toky $P_{\text{ef},1}$ a $P_{\text{ef},2}$ a s plaností výrazů $P_{\text{výsl},1} = -P_{\text{výsl},2} = P_{12}$ a $\bar{\varphi}_{12} \cdot S_1 = \bar{\varphi}_{21} \cdot S_2$ lze **výsledný vzorec** pro výpočet sdílení tepla záření mezi dvěma šedými tělesy, resp. černými tělesy, napsat

$$P_{12} = \frac{C_0}{1 + \left(\frac{1}{A_1} - 1\right) \cdot \bar{\varphi}_{12} + \left(\frac{1}{A_2} - 1\right) \cdot \bar{\varphi}_{21}} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \cdot \bar{\varphi}_{12} \cdot S_1 \quad (\text{W})$$

$$P_{0,12} = C_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \cdot \bar{\varphi}_{12} \cdot S_1 \quad (\text{W})$$

V zjednodušeném tvaru zářivého toku mezi dvěma šedými tělesy lze napsat

$$P_{12} = \varepsilon_n \cdot C_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \cdot \bar{\varphi}_{12} \cdot S_1 \quad (\text{W}),$$

kde ε_n je složená emisivita, která charakterizuje vzájemnou polohu dvou šedých těles, která na sebe sálají.

$$\varepsilon_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\varepsilon_1} - 1\right) \cdot \bar{\varphi}_{12} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) \cdot \bar{\varphi}_{21}} \quad (1).$$

Střední index směrovosti φ . Střední index směrovosti φ_{12} určuje sálání plochy S_1 na plochu S_2 , určují tedy geometrii při sdílení tepla zářením, což je důležitý parametr při určování zářivého toku P_{12} , resp. P_{21} . Indexy směrovosti se určují numericky, nebo experimentálně, pro některé případy existují již ustálené matematické výrazy, neboli čtyři základní **pravidla**.

1. pravidlo. Střední index směrovosti tělesa, které září samo na sebe závisí na tvaru povrchu. Vypouklé a rovné povrchy sami na sebe nezáří, tedy $\bar{\varphi}_{11} = 0$, což ale neplatí pro vydutá tělesa, kde $\bar{\varphi}_{11} \neq 0$.
2. pravidlo. Princip vzájemnosti. Pro dvě tělesa – 1 a 2 – platí $\bar{\varphi}_{12} \cdot S_1 = \bar{\varphi}_{21} \cdot S_2$.

3. pravidlo. Princip aditivnosti. Máme-li povrch S_2 , jenž se skládá z dílčích povrchů $S_{2,1}; S_{2,2}; S_{2,3} \dots$ atd., pak střední index směrovosti $\bar{\varphi}_{12}$ z povrchu S_1 na povrch S_2 určí jako součet dílčích středních indexů směrovosti z povrchu S_1 na jednotlivé povrchy $S_{2,1}; S_{2,2}; S_{2,3}$, tedy $\bar{\varphi}_{12} = \bar{\varphi}_{12_1} + \bar{\varphi}_{12_2} + \bar{\varphi}_{12_3} + \dots$.
4. pravidlo. Princip uzavřenosti. Sestává-li se uzavřený systém z několika (n) povrchů, potom pro libovolný k -tý povrch platí $\bar{\varphi}_{k,1} + \bar{\varphi}_{k,2} + \bar{\varphi}_{k,2} + \dots + \bar{\varphi}_{k,n} = 1$. Toto pravidlo platí pouze pro průteplivé (propustné) prostředí. Ostatní pravidla 1 až 3 platí i pro případy, kdy se zářivá energie pohlcuje mezi oběma tělesy.

Záření mezi dvěma rovnoběžnými povrchy. Mohou nastat dvě modelové situace. A to a) dva rovnoběžné povrchy bez stínící plochy a b) dva rovnoběžné povrchy se stínící plochou, jak je vidět z obr. **SAL07a)** a obr. **SAL07b)**.

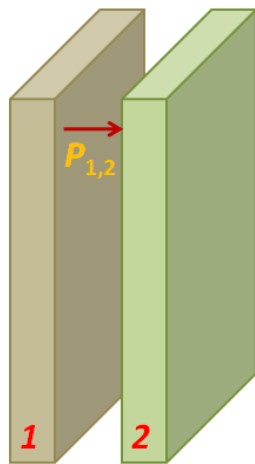
Pro dvě rovnoběžné stěny bez stínící plochy (obr. **SAL07a)**) platí, že povrchy S mají teploty T_1 a T_2 , pohltivosti A_1 a A_2 . Pak platí $\bar{\varphi}_{12} = \bar{\varphi}_{21} = 1$ a $\bar{\varphi}_{11} = \bar{\varphi}_{22} = 0$. Výsledný zářivý tok P_{12} je

$$P_{12} = \frac{C_0}{1 + \left(\frac{1}{A_1} - 1\right) \cdot \bar{\varphi}_{12} + \left(\frac{1}{A_2} - 1\right) \cdot \bar{\varphi}_{21}} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \cdot \bar{\varphi}_{12} \cdot S_1 \quad (\text{W})$$

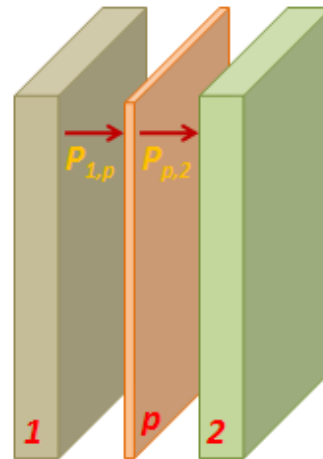
$$P_{12} = \frac{C_0}{1 + \left(\frac{1}{A_1} - 1\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{A_2} - 1\right) \cdot 1} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \cdot 1 \cdot S_1$$

$$P_{12} = \frac{C_0}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \cdot S_1 \quad (\text{W}), \text{ pro šedé povrchy pak } A = \varepsilon.$$

Vzorec pro složenou emisivitu má tvar $\varepsilon_n = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$.



Obr. SAL07a). Rovnoběžné povrchy bez stínicí plochy p .



Obr. SAL07b). Rovnoběžné povrchy se stínicí plochou p .

Nastane-li případ dvou rovnoběžných ploch se stínicí plochou (která může být vložena např. z důvodu snížení zářivého toku P_{12}), jak je vidět na obr. SAL07b), budeme předpokládat, že stínicí plocha nepropouští žádný zářivý tok a má konstantní teplotu T_p . Výsledný tepelný tok P_{12} je pak roven

$$P_{12} = \frac{1}{n+1} \cdot \varepsilon_n \cdot C_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \bar{\varphi}_{12} \cdot S_1 \quad (\text{W}),$$

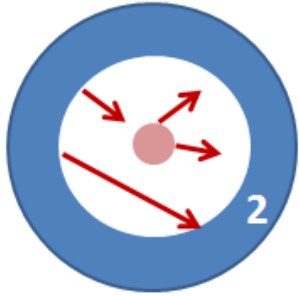
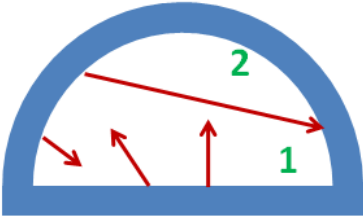
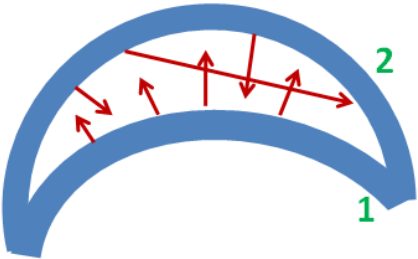
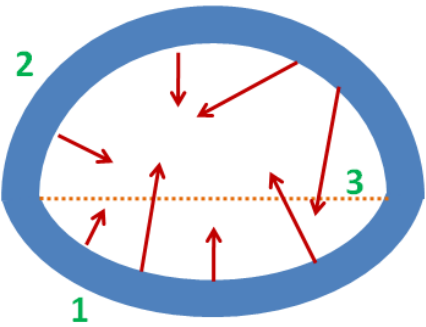
kde n je počet stínicích povrchů. Pro složenou emisivitu ε_n pak platí:

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon_p} - 1} \quad \text{pro } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_p$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_p} - 1} \quad \text{pro } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 > \varepsilon_p$$

Záření mezi zakřivenými povrchy. Pro popis záření mezi zakřivenými povrchy si uvedeme několik příkladů spolu s jejich středními indexy směrovosti. Jedná se vždy o dvě tělesa, která mají své teploty T , své pohltivostě, své povrchy S . Situace jsou v následující tabulce TSAL03.

Tabulka TSAL03. Záření mezi zakřivenými povrchy – situace.

	<p>Trubka</p> <p>Trubka 1 vysílá vše do okolí, na sebe nesálá. Trubka 2 rovněž vysílá vše do okolí, ale může sálát sama na sebe.</p> <p>Střední index směrovosti $\bar{\varphi}_{12} = 1$, $\bar{\varphi}_{11} = 0$ $\bar{\varphi}_{21}$ určíme z principu vzájemnosti $\bar{\varphi}_{12} \cdot S_1 = \bar{\varphi}_{21} \cdot S_2$ $\bar{\varphi}_{22} = 1 - \frac{S_1}{S_2}$</p>
	<p>Tunel</p> <p>V tunelu jsou dvě plochy. Plocha 1 je základna – rovná plocha dole, plocha 2 je vyduťatá konkávní plocha. Plocha 1 vysílá veškerou energii na plochu 2. Plocha 2 sálá na sebe i na plochu 1. Střední indexy směrovosti jsou analogické jako v případě trubky v trubce.</p>
	<p>Okno</p> <p>Okno má dva vypouklé povrchy 1 a 2. Vypouklá plocha 1 veškerou energii vysílá na plochu 2., naopak vypouklá plocha 2 sálá jak na plochu 1, tak sama na sebe (plocha 2). Střední indexy směrovosti jsou analogické jako v případě trubky v trubce.</p>
	<p>Jáma</p> <p>Jáma má celkem 3 povrchy. Povrch 1, jenž sálá přes povrch 3 (fiktivní povrch) na povrch 2. Veškeré teplo z povrchu 1 je vysíláno na povrch 2. Platí $\bar{\varphi}_{12} = \bar{\varphi}_{13}$. Analogicky z povrchu 2 pak $\bar{\varphi}_{21} = \bar{\varphi}_{23}$. Pro povrch 3 (rovný povrch) platí $\bar{\varphi}_{31} = 1$, $\bar{\varphi}_{33} = 0$... pak $\bar{\varphi}_{31} = \frac{S_3}{S_1}$, $\bar{\varphi}_{11} = 1 - \frac{S_3}{S_1}$. Rovněž $\bar{\varphi}_{32} = 1$, $\bar{\varphi}_{33} = 0$ a $\bar{\varphi}_{23} = \frac{S_3}{S_2}$, $\bar{\varphi}_{22} = 1 - \frac{S_3}{S_2}$. Pro povrchy 1 a 2 platí:</p>

$\bar{\varphi}_{12} = \bar{\varphi}_{13} = \frac{S_3}{S_1}, \quad \bar{\varphi}_{11} = 1 - \frac{S_3}{S_1}$ $\bar{\varphi}_{21} = \bar{\varphi}_{23} = \frac{S_3}{S_2}, \quad \bar{\varphi}_{22} = 1 - \frac{S_3}{S_2}$

Pro všechny uvedené případy je potřeba určit zářivý tok. Pro případy – Trubka, Tunel a Oko (viz. **TSAL03**) lze zářivý tok vypočítat následovně

$$P_{12} = \frac{C_0}{\frac{1}{A_1} + \left(\frac{1}{A_2} - 1\right) \cdot \frac{S_1}{S_2}} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \cdot \bar{\varphi}_{12} \cdot S_1 \quad (\text{W}),$$

v případě že plocha S_2 je mnohem větší, než plocha S_1 (například trubka je umístěna sama v prostoru), pak se poměr ploch ve výrazu S_1/S_2 blíží k nule a platí

$$P_{12} = A_1 \cdot C_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \cdot \bar{\varphi}_{12} \cdot S_1 \quad (\text{W}).$$

Pro poslední případ v tabulce **TSAL03** – Jáma – platí následující rovnice pro určení zářivého toku

$$P_{12} = \frac{C_0}{1 + \left(\frac{1}{A_1} - 1\right) \cdot \frac{S_3}{S_1} + \left(\frac{1}{A_2} - 1\right) \cdot \frac{S_3}{S_2}} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \cdot \bar{\varphi}_{12} \cdot S_3 \quad (\text{W})$$

Příklad 4.1

Určete ztrátu tepla sáláním povrchu ocelového porubí s olejovým nátěrem. Průměr potrubí je 396 mm, délka 14 m. Teplota povrchu potrubí je pro všechny případy stejná, tedy 125 °C. Emisivita potrubí s olejovým nátěrem je 0,9.

Potrubí je uloženo:

- ve velké místnosti s teplotou 24 °C,
- v cihlovém kanále čtvercového průřezu (520x520 mm), stěny kanálu mají teplotu 24 °C,
- v hliníkovém plášti (520x520 mm) a teplotě povrchu hliníkového pláště 24 °C.

4.5. Sálání plynů

Doposud jsme se zabývali sáláním látek, které byly pevné. Tuhé látky mají spojitá spektra vyzařování, vyzařují a pohlcují sálavou energii v celém spektru vlnových délek. Nyní se zaměříme na látky plynné. Plyny mají schopnost vyzařovat a pohlcovat sálavou energii různě. Plyny vyzařují a pohlcují zářivou energii jen na určitých vlnových délkách, nebo v jednotlivých intervalech vlnových délek. Plyny tedy vyzařují a pohlcují sálavou energii **selektivně**. Pro jiné vlnové délky jsou plyny průteplivé a jejich sálavá energie je nulová, plyn nesálá ($\varepsilon = 0$), ani nepohlcuje.

Mezi základní plyny, které mají schopnost vyzařovat a pohlcovat sálavou energii jsou víceatomové plyny – sloučeniny CO_2 , H_2O , SO_2 , CO , NH_3 . Jedno a dvouatomové plyny – N_2 , O_2 , a H_2 je velmi malé a lze jej zanedbat. Pro technickou praxi a v závislosti na typu technologie patří sloučeniny CO_2 , H_2O a jejich radiační vlastnosti, k těm, které nejvíce ovlivňují velikost sálavé energie.

Pevná tělesa jsou neprůteplivá pro tepelné paprsky se sálání uskutečňuje pouze v povrchové vrstvě. U plynů se vyzařování a pohlcování děje **celým objemem**. Prochází-li plynem tepelná energie, její velikost se zmenšuje, protože část energie se pohltní v objemu plynu. Zmenšování energie závisí na střední délce paprsku a na parciálním tlaku. **Střední délku paprsku** si můžeme představit jako poloměr polokoule plynu, která vyzářila na elementární plochu umístěnou uprostřed základny stejné množství energie, jaké vyzařuje skutečné těleso na element/část svého povrchu nalézající se v určité poloze. Střední délka paprsku se určí z přibližného vztahu

$$\bar{l} = 3,6 \cdot \frac{V}{S} \frac{\text{objem plynu}}{\text{povrch plynu}} \quad (\text{m}).$$

Záření plynů se řídí již dříve uvedeným Kirchhoffovým zákonem, tzn., že plyn vyzařuje energii jen na takových vlnových délkách, na jakých energii pohlcuje. Integrální intenzita vyzařování E_{pl} daná Stefanovým – Boltzmannovým zákonem je úměrná $T^{3,5}$ pro oxid uhličitý a T^3 pro vodní páru, na rozdíl od čtvrté mocniny termodynamické teploty, lze tedy říci, že plyny se neřídí Stefanovým – Boltzmannovým zákonem. Nicméně v praxi se používá čtvrtá mocnina a známá rovnice

$$E_{\text{pl}} = \varepsilon_{\text{pl}} \cdot \sigma \cdot T_{\text{pl}}^4 \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-2}),$$

kde integrální emisivita plynu $\varepsilon_{pl} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{pl,i} - \Delta\varepsilon$. Kde $\Delta\varepsilon$ je korekční faktor, který se uvádí, překrývají-li se spektrální pásy jednotlivých plynů, jako je tomu např. u CO_2 a H_2O . Integrální emisivita jednotlivých plynů $\varepsilon_{pl,i}$, je funkcí teploty plynu, parciálních tlaků jednotlivých složek plynu, střední délce paprsku a celkového tlaku, tedy

$$\varepsilon_{pl,i} = f(T_{pl}, p_{pl,i}, \bar{l}, p_c),$$

Prakticky si můžeme sálání plynů představit jako sálání směsi plynů, např. spalin. Ve spalinách jsou nejčastěji přítomny CO_2 , H_2O , SO_2 , CO , N_2 , O_2 . Pro zjednodušení uvažujeme pouze vliv CO_2 , H_2O . Víme, že integrální emisivita plynu

$$\varepsilon_{pl} = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{pl,i} - \Delta\varepsilon = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} - \Delta\varepsilon.$$
 Integrální emisivita oxidu uhličitého (obr. SAL08) a

vodní páry (obr. SAL09) se určuje z nomogramů, kdy emisivita je funkcí teploty při celkovém tlaku směsi 101,325 kPa. Křivky v grafu jsou dány součinem parciálního tlaku p_{CO_2} a střední délky paprsku \bar{l} . Pokud se celkový tlak liší od tlaku 101,325 kPa, integrální emisivita pro oxid uhličitý se musí vynásobit opravným součinitelem pro CO_2 . Totéž platí pro vodní páru – pro jiné tlaky se integrální emisivita vynásobí opravným součinitelem. Grafy pro oba opravné součinitele jsou na obr. SAL10 pro CO_2 a SAL11 pro H_2O . Korekční faktor $\Delta\varepsilon$ pro směs plynů CO_2 a H_2O se odečítá z grafů na obr. SAL12. Hodnota $\Delta\varepsilon$ je poněkud malá a proto ji můžeme zanedbat.

Záření mezi plynem a tuhým tělesem. V předešlém textu jsme se zabývali zářením dvou tuhých těles, pro něž jsme určili zářivý tok P_{12} , určili jsme si také, jaká je intenzita vyzařování plynů, resp. spalin. V případě, že budeme uvažovat teplotu povrchu tuhého tělesa a teplotu plynu, musíme uvažovat se zářivým tokem z povrchu tělesa a jeho částečným pohlcením v plynném objemu.

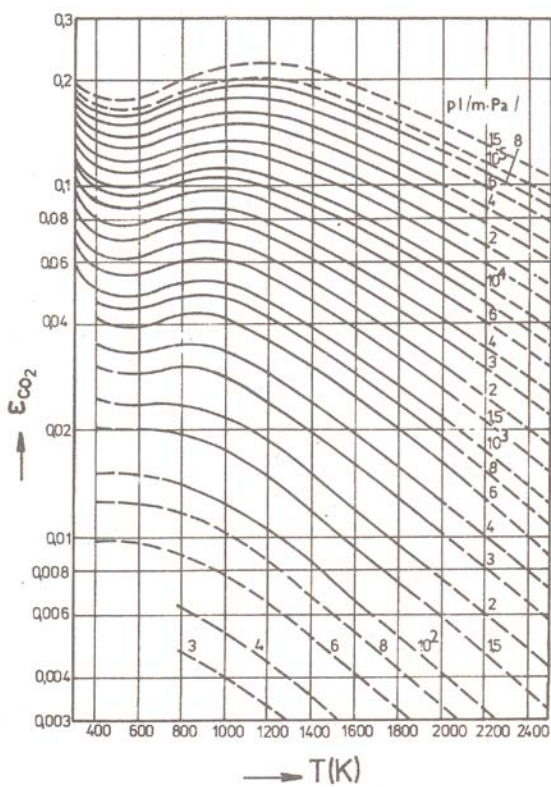
Zářivý tok mezi plynem (1) a šedým tělesem (2) pak vypočteme z následujícího vztahu

$$P_{12} = \frac{C_0}{\frac{1}{\varepsilon_{pov}} + \frac{1}{\varepsilon_{pl,st}} - 1} \cdot \left[\frac{\varepsilon_{pl}}{\varepsilon_{pl,st}} \cdot \left(\frac{T_{pl}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{pov}}{100} \right)^4 \right] \cdot S \quad (\text{W}),$$

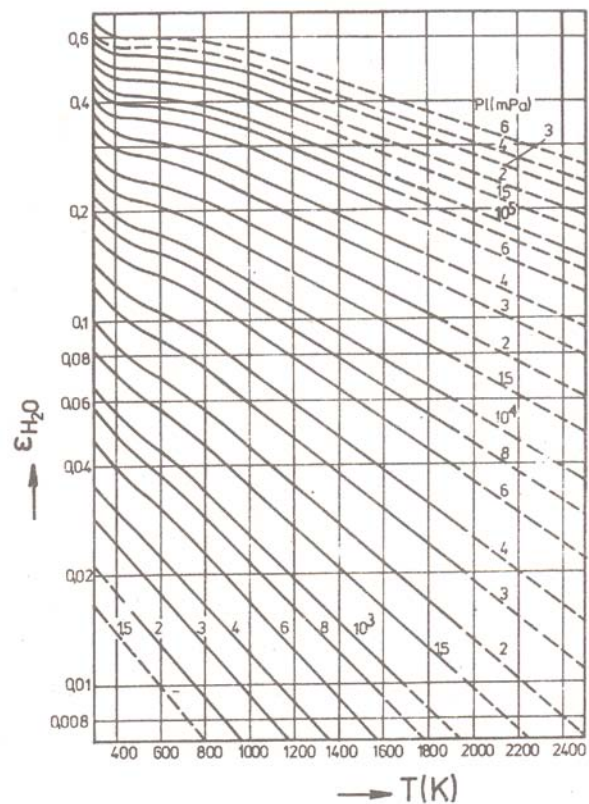
kde ε_{pov} je integrální emisivita povrchu šedého tělesa, ε_{pl} je integrální emisivita plynu při jeho teplotě, $\varepsilon_{\text{pl, st}}$ je integrální emisivita plynu při teplotě povrchu stěny.

Příklad 4.2

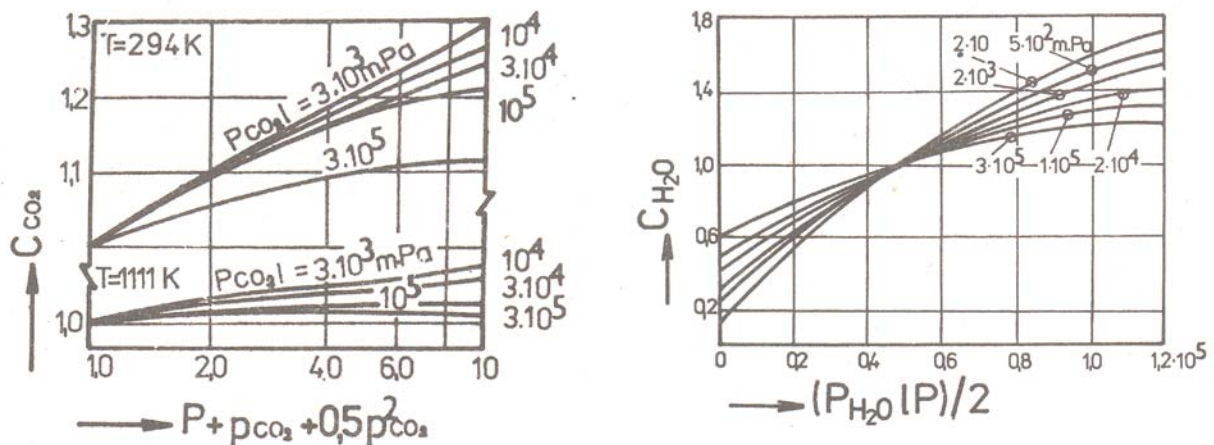
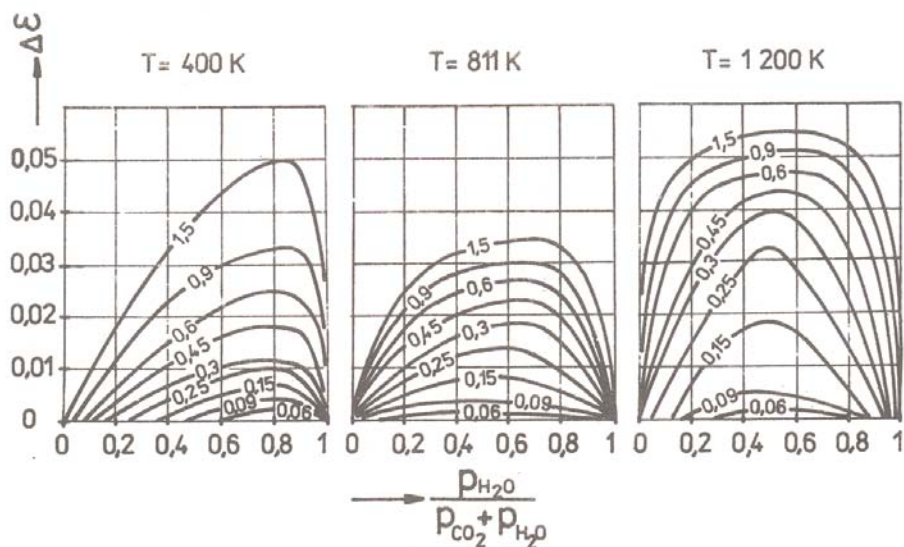
Spaliny s obsahem 10 % CO_2 a 8,5 % H_2O proudí válcovým kanálem o průměru $d = 1,5$ m. Teplota plynu na vstupu do kanálu je $t_{\text{pl},1} = 950$ °C, při výstupu z kanálu je $t_{\text{pl},2} = 850$ °C. Teplota vnitřního povrchu kanálu na vstupu je $t_{\text{st},1} = 625$ °C a při výstupu $t_{\text{st},2} = 575$ °C. Emisivita stěny kanálu $\varepsilon_{\text{st}} = 0,88$. Stanovte ~~ř~~ rovný zářivý (tepelný) tok sáláním z plynu na povrch kanálu.



Obr. SAL08. Nomogram pro určení integrální emisivity oxidu uhličitého.



Obr. SAL09. Nomogram pro určení integrální emisivity vodní páry.

Obr. SAL10. Opravný součinitel pro CO₂Obr. SAL11. Opravný součinitel pro H₂OObr. SAL12. Grafy pro určení korekčního faktoru $\Delta\epsilon$ 

Shrnutí pojmů kapitoly 4

Sdílení tepla zářením není vázáno na hmotné prostředí, může probíhat i ve vakuu, protože jeho podstata je založena na elektromagnetickém vlnění (které se šíří rychlostí světla), resp. přenosu energie. Rozlišujeme dvě teorie pro popis elektromagnetického spektra – vlnovou teorii a korpuskulární teorii. **Vlnová teorie** se řídí zákony vlnové optiky. Rychlost světla je dána součinem frekvence f a vlnové délky λ . Korpuskulární teorie, zavádí pojem **kvantum**,

jehož energie je úměrná frekvenci f a Planckově konstantě $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s. Kvantum elektromagnetického pole, které může být vyzařeno, nebo pohlceno se nazývá **foton**.

Černé těleso je fiktivní těleso, které při dané teplotě vyzařuje nebo pohlcuje maximální množství zářivé energie. Všechna „ostatní“ tělesa jsou **šedá tělesa**.

Intenzita vyzařování představuje hustotu tepelného toku, **zářivý tok** P je množství energie vyzařené tělesem do poloprostoru a vyjadřuje tepelný tok. **Směrová intenzita vyzařování** I představuje množství energie vyzařené v určitém směru. **Plošná zářivost** L je směrová intenzita vyzařování, která je vztažena k elementární plošce.

Mezi radiační vlastnosti materiálu patří **pohltivost** A , **odrazivost** R a **propustnost** T . Jejich součet je roven 1. Další radiační vlastností je emisivita ε . Je dána poměrem intenzity vyzařování šedého tělesa k intenzitě vyzařování černého tělesa. Je bezrozměrnou veličinou závislou na charakteru materiálu a na teplotě materiálu. Různé materiály mají různé emisivity.

Mezi **základní zákony** pro sdílení tepla zářením platí:

Planckův zákon: „Intenzita vyzařování černého tělesa je závislá na vlnové délce. Pro každou teplotu existuje maximum vyzařené energie při určité vlnové délce“.

Wienův posunovací zákon: S rostoucí teplotou se maximum vyzařené energie posouvá ke kratším vlnovým délkám“.

Stefanův – Boltzmannův zákon: „Intenzita vyzařování černého tělesa je úměrná čtvrté mocnině termodynamické teploty“.

Lambertův zákon. Popisuje vyzařování energie do jednotlivých směrů poloprostoru.

Kirchhoffův zákon. Popisuje vzájemnou závislost mezi emisivitou ε a pohltivostí těles A .

Střední index směrovosti $\bar{\varphi}_{12}$ popisuje vzájemnou geometrii mezi dvěma tělesy, které na sebe září. Pro určení středního indexu směrovosti platí 4 pravidla.

Střední délka paprsku pro sálání plynů představuje poloměr koule plynu, který vyzářila na vodorovnou elementární plochu dané polokoule.



Otázky ke kapitole 4

96. Popište rozdíl mezi sdílením tepla zářením a sdílením tepla vedením.
97. Uveďte příklady z vlnové a korpuskulární teorie a vysvětlete podstatu obou teorií.
98. Co je to kvantum energie?
99. Jakými způsoby můžeme vyjádřit elektromagnetické spektrum.
100. Uveďte příklady využití jednotlivých částí elektromagnetického spektra.
101. Jaké záření (jaká část elektromagnetického spektra) se podílí na sdílení tepla zářením (radiací)?
102. Co je to černé těleso a jak se liší od tělesa šedého?
103. Kdy používáme integrální veličiny a kdy veličiny spektrální?
104. Vyjmenujte radiační vlastnosti materiálu.
105. Proč je materiál průteplivý?
106. Vysvětlete pojem emisivita.
107. Je emisivita závislá na teplotě? Jestliže ano, pak uveďte konkrétní příklady.
108. Kdy je emisivita rovna hodnotě jedna?
109. Jak spolu souvisí Planckův zákon a Wienův zákon?
110. Proč se Wienovu zákonu říká zákon posunovací?
111. Definuňte Stefanův – Boltzmannův zákon. Jak ho vyjádříte pro černé těleso a jak pro šedé těleso?

112. Který zákon popisuje vyzařování energie do jednotlivých směrů v prostoru? Napište matematické vyjádření pro Kirchhoffův zákon. A slovně zdůvodněte.
113. Jak probíhá záření mezi dvěma šedými tělesy?
114. Co nazýváme indexem směrovosti?
115. Jakými pravidly se indexy směrovosti řídí? Vysvětlete rozdíl mezi jednotlivými pravidly.
116. Jak se změní zářivý tok mezi dvěma rovnoběžnými tělesy, vložíme-li mezi ně stínící plochu?
117. Jak probíhá záření mezi zakřivenými povrchy? Popište jednoduché situace.
118. Jak probíhá sdílení tepla záření u plyných látek?
119. Vyjmenujte plynné sloučeniny, které mají schopnost pohlcovat, nebo vyzařovat sálavou energii.
120. Vysvětlete, co si představíte pod pojmem střední délka paprsku?
121. Jak byste matematicky určili zářivý tok mezi plynou látkou a šedým tělesem?

5. VYUŽITÍ MODERNÍCH SIMULAČNÍCH SOFTWARŮ VE SDÍLENÍ TEPLA A PROUDĚNÍ

Teoretický základ ze sdílení tepla a proudění, získaný v předešlých kapitolách, dává možnost pochopit chování látek, resp. materiálů v různých podmínkách. Aplikací těchto teoretických znalostí je následující kapitola, která nastíní možnosti řešení tepelných úloh pomocí simulačních programů, tedy využití moderních softwarů dnes běžně dostupných na trhu a hojně využívaných odbornými technickými pracovníky.

Dnes existují softwary aplikující metodu konečných prvků/objemů v různých formách. Z hlediska dostupnosti a podpory lze hovořit o programech *komerčních*, které vyvíjejí a prodávají specializované firmy pro relativně široké spektrum uživatelů v daném oboru, programy *firemní*, které vznikly v jednotlivých firmách (často v době, kdy vhodný komerční produkt nebyl dostupný) a programy *veřejné*, které vznikají na univerzitách jako otevřené experimentální kódy. Vzhledem k vysoké kvalitě, širokému spektru řešitelných problémů a relativní cenové dostupnosti komerčních programů dnes vývoj nových firemních kódů téměř neexistuje.



Čas ke studiu: 5 hodin



Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat typy tepelných úloh – přímá úloha, nepřímá úloha, identifikační úloha, optimalizační úloha,
- vysvětlit, co je cílem simulace,
- definovat modely a umět je rozdělit,
- v krátkosti popsat metodu konečných prvků,
- popsat postup při tvorbě simulace,
- pojmenovat jednotlivé simulační programy a určit jejich vhodnost pro jednotlivé fyzikální děje,

- definovat a vyjádřit hlavní důvody pro použití numerických simulací,
- seznámíte se s konkrétními příklady numerických simulací ze sdílení tepla a proudění.



Výklad

5.1. Tepelné úlohy

Tepelné úlohy lze **rozdělit** do 4 základních skupin, které se liší charakterem a algoritmem řešení. Jsou to úlohy přímé, nepřímé, identifikační a optimalizační.

U **přímých úloh** se hledá vnitřní reakce tepelného systému na vnější podnět vyvolaný okrajovou podmínkou a počátečním stavem systému, který je dán počáteční podmínkou. Výsledkem řešení je určení teploty nebo teplotního pole pro zadané podmínky jednoznačnosti. Tyto úlohy převažují při řešení tepelných systémů obecně, tedy řešením takových úloh je analýza tepelného systému, vyvolaného podnětem (okrajovou podmínkou), namísto řízení tepelného systému. Přímé úlohy můžeme dělit dále na úlohy stacionární, nestacionární, lineární, nelineární, úlohy s různými okrajovými podmínkami, úlohy s fázovými přeměnami, s pohyby hranic, s vnitřními zdroji tepla apod.

Nepřímá úloha je formulována tak, že pro předem známé chování tepelného systému se hledá odpovídající vnější, nebo vnitřní reakce, to jest okrajová podmínka, tepelně-fyzikální parametry, tepelný tok, nebo tvar systému. *Vnější (okrajovou) nepřímou úlohou* nazýváme úlohu, hledá-li se okrajová podmínka, tepelný tok, součinitel přestupu tepla. *Vnitřní (parametrickou) úlohou* nazýváme úlohu, při níž hledáme tepelně fyzikální parametry (λ , c_p , a). Při *tvarově nepřímé úloze* hledáme var oblasti. Hledá-li se počáteční podmínka, pak se jedná o *počáteční nepřímou úlohu*.

Identifikační metody určují nebo častěji zpřesňují matematický model tepelného systému. Při řešení se hledají výstupní odezvy tepelného systému na odpovídající podněty, přičemž vnitřní chování tepelného systému se nezkoumá. Tepelný systém představuje „černou skříňku“, u níž se řeší tepelný přenos mezi vstupem s výstupem.

Optimalizační úlohy jsou zaměřeny na řešení různých druhů optimalizace tepelného procesu nebo tepelného systému. Hledají se nové podmínky (i okrajové), při níž jsou splněny zadané podmínky optimalizace. U těchto metod se pak zadávají tzv. omezující podmínky (např. maximální teplota, rychlost ohřevu, apod.), která je dána charakterem řešené úlohy dle tepelného systému. Například ohřev materiálu je typickou úlohou optimálního řízení tepelného procesu. Kromě omezujících podmínek jsou zde ještě další požadavky – minimální doba ohřevu, či minimální spotřeba energie, což je důležité pro ekonomiku tepelných procesů obecně.

Stručný přehled metod a modelů. Řada tepelných procesů, vyskytujících se v běžné průmyslové a technologické praxi má nestacionární charakter. Řešení tepelných úloh nestacionárních (i vícerozměrných, 2D, 3D) je vždy složitější než u úloh stacionárních, nebo jednorozměrných, protože do děje zasahuje další proměnná – čas. Tento „drobný“ rozdíl pak způsobuje jiné použití jiných matematických rovnic a s tím spojenou náročnost konkrétního výpočtu tepelného systému. Metody, využívané pro řešení tepelných systémů lze rozdělit na metody analytické a numerické.

Analytické metody umožňují získat řešení tepelné úlohy ve tvaru matematického výrazu pro teplotu jako funkci souřadnic a času. Řešení musí odpovídat určité rovnici a podmínkám jednoznačnosti. Ve většině technických tepelných úloh je nutno zjednodušit matematický model tak, aby úloha byla řešitelná. Zjednodušení modelu musí být v souladu se zachováním věrohodností tepelného procesu.

Analytické metody se rozdělují na metody *přesné* a *přibližné*. Přesné metody slouží pro kontrolní řešení jednorozměrných úloh s jednoduššími okrajovými podmínkami. Přibližné metody pak pro složitější okrajové podmínky. V podstatě ale každá metoda může být nazvána metodou přibližnou, protože každý model je jen přibližným vyjádřením skutečného stavu (tepelného procesu). Ke *klasickým analytickým metodám* – tzv. *tepelným úlohám* se řadí metoda separace proměnných (neboli Fourierova metoda), metoda Greenových funkcí a metoda tepelných potenciálů. Další skupina analytických metod jsou *metody integrálních transformací*. Zde lze zařadit metody Laplaceovy a Fourierovy transformace proměnných. Obě skupiny metod se odlišují v účinnosti řešení, která je u tepelných úloh výrazně vyšší než

u metod integrálních. A platí zde omezení v jejich použití pro lineární úlohy s lineárními okrajovými podmínkami.

Variační metody jsou na rozdíl od předchozích dvou skupin vhodné i pro přibližné řešení úloh nelineárního vedení tepla. Principem variační metody je, že se místo řešení diferenciálního matematického modelu fyzikálního pole (např. teplotního pole) řeší variační úloha o extrému některého funkcionálu v integrálním tvaru, obvykle jde o minimum funkcionálu energie. Patří sem metoda Ritzova, Kantorovičova a Biotova.

Pro řešení tepelných úloh mají analytické metody omezené použití.

Numerické metody se s nástupem výkonných počítačů dostávají stále více do popředí jako schůdný nástroj k řešení tepelných úloh a nejen jich. Podstata metody spočívá v diskretizaci prostoru, resp. času. Typické pro tyto metody je opakovatelnost algebraických operací určitého typu, jenž pro výkonný počítač není problém. Numerické metody umožňují získat řešení tepelného problému (úlohy) v konečném počtu diskrétních míst (uzlů) zvolené sítě a to v celé oblasti, nebo její části.

Numerické metody lze rozdělit na *explicitní* – metoda sítí, Schmidtova metoda, metoda elementárních bilancí, jejichž výhodou je jednoduchost, nevýhodou pak je ohraničená volba časového kroku řešení. Stabilita řešení vyžaduje používat malé hodnoty časového kroku, čímž se zvyšuje počet operací při výpočtu a prodlužuje se doba řešení úlohy na počítači. Naopak, numericky stabilní metody jsou *implicitní a jiné metody* – Crankova-Nicolsonova metoda, metoda konečných prvků, metoda konečných objemů. V současné době moderní simulační softwary využívají poslední dvě jmenované implicitní metody, a proto jsou dále samostatně popsány.

Cílem simulace (modelování) je popsat, nebo odhadnout vzájemné interakce reálných objektů/systémů při působení okrajových podmínek, prostřednictvím zkoumání modelu. Model je navržen co nejméně reálnému stavu, aby provedené simulace byly odpovídající. Modelové objekty mohou být fyzické a abstraktní.

Fyzické modelové objekty a jejich interakce jsou totožné s reálnými. Jako fyzické modelové objekty se považují všechny typy *experimentů*. Fyzické modelové objekty, které nejsou

totožné s reálnými, založené na předpokladech a zjednodušeních, jsou pak nazývány *podobnými* – např. podobnost fyzikální, geometrická ve zmenšených modelech. Sem lze přiřadit *analogické modely*, které využívají analogie mezi fyzikálními jevy (např. elektroanalogie, hydroanalogie). *Abstraktní modely* vznikly jako produkt některé obecné vědy (např. fyzika, mechanika) s podporou matematiky. Tyto modely mají univerzální charakter a zaměřují se na modelování specifických interakcí reálných objektů. Ne vždy však vycházejí z vnitřní podstaty reality, ale všímají si jen určitých důsledků jejich projevů. Proto se označují jako *fenomenologie*. Modely vždy pracují se skupinou rovnic, které jsou jednoduše řešitelné. Takových modelů je málo. Naopak existuje spousta reálných modelů, popsaných složitými matematickými, či fyzikálními rovnicemi, které nelze jednoduše vyřešit. Východiskem je *numerická matematika*, ve které jsou matematické rovnice modelovány/simulovány (zobrazeny na jiné matematické struktury) numericky, je řešen numerický model a výsledky jsou interpretovány v prostoru původního matematického modelu.

Rozdělení modelů:

1. *Mechanické modely* – vycházení z fenomenologické teorie klasické mechaniky. Jsou to modely dokonale tuhých těles; modely pružných těles, založené na mechanice kontinua (pevná fáze); modely založené na popisu pohybu (tekutiny); modely termomechanických dějů, modely kombinované – např. model pružného tělesa s teplotním polem, nebo jinak provázané modely.
2. *Modelování stacionárních dějů*. Jsou to časově ustálené modely. Tyto modely popisují výsledný (ustálený) stav systému bez ohledu na způsob, jakým ho bylo dosaženo.
3. *Nestacionární modely*. Tyto modely popisují proces/stav systému a jeho trvání v čase.
4. *Deterministické modely*. V těchto modelech je vztah mezi příčinou a následkem jednoznačný, na rozdíl od následujících metod.
5. *Stochastické metody*, založené na pravděpodobnosti – každé možné odezvě na danou příčinu je přiřazována pravděpodobnost realizace. Stochastické vlastnosti mohou být v modelu vnášeny jako nejistota např. při popisu materiálu, či jiných okrajových podmínkách.

Mechanické modely jsou klasifikovány podle toho, jak jsou dále využívány. Modely mohou sloužit pro *návrh* a *ověření* navrženého systému/technického díla (např. výpočet tepelného, či mechanického zatížení materiálu). Modely slouží jako *kontrola* funkčních parametrů systému (např. výpočet doby životnosti při zatěžování materiálu na základě norem, apod.). Modely slouží k podrobnému *popisu* reálných provozních podmínek, vytvořený pomocí jednoduchého simulačního modelu, ve kterém mohou snadno měnit vstupní/výstupní parametry.

5.2. Metoda konečných prvků (MKP, FEM)

Z matematického úhlu pohledu je metoda konečných prvků variační metodou. Řešení soustavy lineárních (parciálních) diferenciálních rovnic (LPDR) je konstruováno jako lineární kombinace báze funkcí. To lze interpretovat tak, že úloha - najít řešení ve tvaru spojitě funkce byla převedena na úlohu najít diskrétní množinu reálných čísel – koeficientů uvedené lineární kombinace. Proto se tomuto procesu říká diskretizace. V praktických případech se často pracuje s konečným počtem báze funkcí, a řešení je proto pouze přibližné. Kritéria pro stanovení hledaných koeficientů vycházejí z požadavku, aby po dosažení přibližného řešení – lineární kombinace báze funkcí s těmito koeficienty – do řešené soustavy LPDR byla tato soustava splněna co nejpřesněji. Jde o to, vyjádřit společnou míru nepřesnosti mnoha koeficientů jedním číslem – skalárem. Tyto postupy se obecně označují jako variační metody. V klasické mechanice pružných těles se prosadily zejména variační principy využívající energie vnitřních a vnějších sil – princip virtuálních posuvů (Lagrangeův variační princip), princip virtuálních sil (Castiglianův variační princip) a jim odpovídající principy minima celkové potenciální energie a minima komplementární potenciální energie. Tyto a další přístupy byly známy a používány dlouho před vznikem MKP. Uvedené variační principy ale obvykle vyžadují, aby libovolná lineární kombinace báze funkcí splňovala homogenní okrajové podmínky buď v posuvech (Lagrangeův princip) nebo v napětích (Castiglianův princip). Toho lze více či méně snadno dosáhnout u těles se speciální geometrií, ale u těles obecného tvaru se tento požadavek zdá nespílitelný.

Průlom v této oblasti přinesla až metoda konečných prvků, která vznikla jako inženýrská metoda vycházející z mechaniky těles a soustav. Složitě těleso (například rám) je rozloženo na mnoho jednodušších podtěles (např. přímých nosníků). Deformační odezva podtělesa na zatížení je popsána lineárními vztahy mezi konečným počtem posuvů (a natočení) a sil (a

silových dvojic), typicky s využitím maticového aparátu. Aplikace vazeb mezi podtělesy vede přímo k sestavení (maticových) rovnic popisujících odezvu celého tělesa. Při aplikaci na rovinné kontinuum je těleso pokryto konečným počtem konečně velkých podoblastí – konečnými prvky. Deformační odezva (posuv) v každém prvku je dána konečným počtem parametrů a odezvu tělesa lze získat aplikací vazbových podmínek mezi elementy, které mimo jiné musí zajistit spojitost posuvu. Aby hodnoty parametrů určujících posuv mohly být vyšetřeny například na základě principu minima celkově potenciální energie, musí jimi určený posuv splnit apriorní okrajové podmínky. U klasických bází (Fourierovské, Taylorovské) to je problém, protože každá báze je obecně nenulová v celém tělese a tudíž ovlivňuje posuv všude. Naproti tomu, díky rozdělení tělesa na elementy, mají neznámé parametry omezený dosah, a proto lze ty, které ovlivňují posuv tam, kde je zadána okrajová podmínka, považovat za dané a za neznámé brát ty ostatní. Tento způsob diskretizace kontinua byl později matematiky interpretován jako speciální konstrukce bázových funkcí s omezeným dosahem. Je společný všem přístupům, které jsou označovány jako metoda konečných prvků a je obecně použitelný pro přibližné variační řešení soustav LPDR nejen v mechanice poddajných těles, ale i v jiných oborech.

MKP je tedy založena na zcela jiném principu než analytické metody. Zatímco analytické metody jsou založeny na diferenciálním a integrálním počtu, MKP je založena na obecně méně známém počtu variačním, hledá minimum nějakého funkcionálu.

5.3. Postup tvorby simulace - obecně

Práce se simulačním softwarem má tři základní fáze:

- **preprocessing – příprava vstupních dat** – v této části se připravuje geometrický model, jehož modelování je součástí simulačního softwaru, nebo se geometrie importuje z některého z CAD systémů (např. Pro/Engineer, Autodesk Inventor, SolidWorks), určují se materiálové konstanty, parametry výpočtu, parametry pracovního procesu (tzn. okrajové podmínky procesu), tvorba sítí (meshing), případně pohyby těles nebo nástrojů,

- **processing – výpočet (numerické jádro)** – v této části softwaru dochází k vlastnímu výpočtu zvolenými metodami, s vlastnostmi implementovanými do systému pomocí tzv. řešiče (solveru). Můžeme například řešit problém z oblasti: vícefázové reakce látek, posun a deformace těles díky silovému, resp. napětřovému zatížení, turbulentní modely, radiace, konvekce, vedení, akustika, šíření mechanického vlnění, spalování, apod. Ověřit tak děj s různými modely výpočtu,
- **postprocessing – zpracování dat** – zde se detailně zobrazují výsledky ze simulačního výpočtu (grafy, animace). Většina programů umožňuje širokou škálu výstupu všech proměnných vstupujících do výpočtu (teplota, rychlost proudění, tlak, hodnoty kritérií, apod. ve všech směrech (osách) ve formě vektorovém či proudnicovém znázornění, tzv. kontury). Je třeba poznamenat, že lze vyhodnocovat, resp. dle výsledků modifikovat původní úlohy vzhledem k dosaženým výsledkům. Tím dochází ke zpřesňování samotného výpočtu, tj. zvýšení přiléhavosti k reálným parametrům.

Ruční výpočet FEM je tak náročný, že se neprovádí, proto jsou využívány výkonné počítače (např. s 8 jádrovým procesorem, apod.). Výkonnost počítače je limitujícím faktorem, který určuje koncepci výpočtu, resp. zvolené úlohy. Požadavek na numerické jádro jako nejdůležitější části softwaru spočívá v tom, že musí obsahovat ty modelové/výpočtové úlohy, které budou využívány (buď jsou modely úzce specializované – například úlohy týkající se technologii tváření, modelování crash-testů, svařování, odstřely, apod.; nebo modely obecněji pojaté – např. aplikace v technice – mechanika, termomechanika, aerodynamika, úlohy o elektromagnetickém poli, apod.). Úlohy musí být stále ověřovány a testovány jak po stránce fyzikální, tak matematické tak, aby se nevyskytovaly programátorské chyby, aby úlohy byly uživatelsky srozumitelné. Zpětnou vazbou jsou pak tyto modely, pro numerická jádra, aktualizovány a zdokonalovány.

Všechny tři části softwaru jsou spolu propojeny a tvoří jeden významný celek pro modelování fyzikálních/technických/tepelných úloh.

□ Stručný přehled FEM/FVM simulačních software pro 2D/3D modelování

Jedním z nejvíce používaných a známých software pro numerické modelování je **ANSYS®**. Tato firma se specializuje na celou škálu problémů z oblasti fyziky, mechaniky, aerodynamiky, hydrauliky, magnetismu a elektřiny, přestupu tepla, spalování, apod. Pro každou z uvedených oblastí je určen příslušný modul např. LS-Dyna, Workbench, apod. Univerzálním softwarem je pak **ANSYS® Multiphysics™**, zahrnující všechny numerické moduly dohromady.

Mezi další specializované firmy produkující komerční software patří MSC, mezi jehož programy patří např. **SUPERFORGE** pro simulaci objemového a plošného tváření za tepla a za studena, pouze ve 3D, **SUPERFORM**, či **AUTOFORGE** – pro simulaci objemového a plošného tváření. Samostatnou firmou poměrně hojně rozšiřující své produkty je firma dodávající stejný produkt **DEFORM** – pro simulaci objemového a plošného tváření s modulem pro přestup tepla. Francouzská společnost Transvalor nabízí software nazvaný **FORGE** – pro simulaci tváření za tepla a za studena s modulem pro výpočet přestupu tepla. Modely uvedených společností pracují s tuhými i plastickými tělesy, k významným výhodám patří možnost na základě výsledků simulace předvídat vznik mikrotrhlin v tvářeném polotovaru. Český trh se pokouší získat tuzemská společnost ITA, která stojí za tvorbou software **FORFEM** – pro simulaci v oblasti objemového a plošného tváření (s úplnou teplotní vazbou) za tepla i za studena, pro válcování plochých vývalků, protahování, modul pro simulaci tepelného zpracování. Tento program pracuje v současné době pouze ve 2-D prostoru, již delší dobu se pracuje na vývoji 3-D modulu. **PAM-STAMP** – pro simulaci v oblasti lisování a hlubokého tažení plechů. **AUTODESK INVERTOR** pro statické výpočty z pružnosti a pevnosti. Donedávna samostatná společnost komerčně nabízející software **FLUENT** – pro proudění tekutin, spalování, chemické reakce, apod. byla nedávno fúzně sloučena s výše uvedenou společností ANSYS. V současné době je tedy na trhu mezi jinými majoritní poskytovatel software věnujícího se proudění a tepelným výpočtům, a sice posledně jmenovaná společnost. Americká společnost s názvem **COMSOL** se snaží nabízet produkty podobné jako firma ANSYS.

CFD - tzv. Computational Fluid Dynamics je výpočetní technologie, která umožňuje pozorovat dynamiku proudících částic. Použitím CFD můžete vytvořit výpočetní modely, které reprezentují obecné systémy nebo zařízení. Po aplikaci rovnic mechaniky tekutin nebo chemického procesu na tento virtuální model s využitím výpočetní techniky, můžete předpovídat chování tekutin se všemi zákonitostmi. CFD programy poskytují výkonný prvek pro simulaci proudění kapalin či plynů, přenosu teploty či hmoty, interakce mezi pevnou látkou a tekutinou. Použitím CFD analýzy můžeme vytvořit virtuální prototyp systému či procesu, který lze sledovat v určitém časovém kroku a následně analyzovat odezvu chování procesu na různé podněty. Program uživateli nabízí nepřehledné množství výstupů ve formě dat či grafického znázornění, z kterého lze snadno zjistit pravděpodobnost chování namodelované soustavy/procesu.

MBS – tzv. Multi body simulation – je simulace pro zkoumání dynamického chování těles (např. program **ADAMS**, společnosti **MSC**). Tento software se zabývá dynamikou pohyblivých částí, vypočítá zatížení a síly rozložené v mechanickém systému, vibrace systému, přechodové jevy, rotace, nelineární pohyb, apod.

Dovede vytvořit virtuální prototypy mechanických systémů jejich chování v čase a podrobit je virtuálnímu fyzikálnímu a mechanickému testování.

CATIA (společnost **DSS**) – je software pro 3-D počítačové konstruování v oblastech CAD/CAM/CAE. Používá se v leteckém, lodním a automobilovém průmyslu, ale je rozšířený i do dalších oblastí – např. robotika. Je to software, který podporuje všechny stupně vývoje produktu od koncepce a konstrukce (CAD – computer-aided design), přes výrobu (CAM – computer-aided manufacturing) až po analýzy (CAE – computer-aided engineering). Je to software, který popíše daný výrobek od zadání koncepce, přes návrhy, tvorby modelů, obrábění až po konečnou podobu.

5.4. Hlavní důvody pro využívání počítačové simulace

1. Simulací lze řešit i velmi složité technologické operace, které jsou neřešitelné nebo obtížně řešitelné analytickými metodami, popř. kde by použití analytického řešení bylo příliš zjednodušující. Pomocí simulace je rovněž možné prověřit výsledky docílené jinými metodami z hlediska experimentů, nebo výsledků z praxe. Tím lze dosáhnout snadného modifikování daného problému, například při změně okrajových podmínek.
2. Simulace umožňuje studium chování různých technologií, ve zrychleném nebo zpomaleném čase. Po zhotovení geometrického modelu a provedení simulačního výpočtu lze pak během několika minut např. odsimulovat průběh celé technologické operace.
3. Již samotné zkušenosti z tvorby simulačního modelu mohou vést k návrhům na zlepšení geometrie či materiálu. Vytvoření simulačního modelu (tj. zjednodušeného popisu reálného stavu) totiž není možné bez důkladné analýzy zkoumaného problému, která může odhalit v samotném začátku zpracování zadání značné rezervy.
4. Simulace nabízí komplexní pohled na studovaný problém a umožňuje tak jeho analýzu na základě více kritérií. Změnou jednoho konstrukčně-technologického parametru lze sledovat jeho vliv jak na chování (tvářeného) materiálu, tak na průběh technologické operace.
5. Pomocí simulace je možné důkladně prověřit různé varianty řešení. To umožňuje minimalizovat rizika chybných rozhodnutí. Dá se tak předejít eventuelním dodatečným opravám nástrojů, které jsou náročné jak časově, tak ekonomicky.
6. Možnost využití již jednou vytvořeného simulačního modelu i v dalších činnostech.
7. Kvalita výsledků simulace samotné je samozřejmě odvislá na přesnosti definování okrajových podmínek, resp. zahrnutí co největšího počtu možných vlivů, které se podílejí, či ovlivňují proces/děj samotný.

Simulace podporuje tvůrčí proces. Získání rychlých výsledků různých variant, možnost ověření si i netradičních řešení, větší přehled o procesu - to vše podporuje proces hledání a rozhodování a uplatnění vlastní kreativity. Nicméně za správnost výsledků ze simulace vždy

ručí uživatel, nikoliv metoda. Vyvarovat se použít nesprávnou úlohu a přesně ji sestavit je základem pro správné výsledky.

5.5. Vybrané příklady tepelných úloh a jejich řešení pomocí simulačních programů.

Tepelné úlohy můžeme řešit dvěma základními způsoby:

- provedení experimentu – tedy přímé resp. nepřímé měření veličin s výpočtem,
- použití modelování daného děje pomocí vhodných softwarů.

Pro oba způsoby se snažíme použít vhodný postup, abychom děj co nejpřesněji popsali a následně vyřešili (např. určili závislost nějaké veličiny na teplotě, apod.).

Postup:

- Vymezení, které *matematické rovnice* budeme používat – např. parciální diferenciální rovnice pro vedení tepla, nebo Navierovu – Stokesovu rovnici, nebo rovnici kontinuity, apod.
- Trvání děje – posoudíme, zda-li se děj probíhá stacionárně, nebo nestacionárně, závislost veličin daného děje na čase je důležitým prvkem.
- Stanovení si počátečních a povrchových podmínek.
- Stanovení si materiálových podmínek.
- Stanovení průběhu experimentu, co a jak udělám. V případě modelování pak vyberu vhodného výpočtového/matematického modelu (což souvisí s bodem prvním).
- Ukládání dat a jejich zpracování. V případě experimentu je sběr dat prováděn ústřednou/PC, kde také je prováděna jejich archivace. Následuje přenos dat do pomocných výpočtových softwarů (nejčastěji MS EXCEL) a dodatečná úprava a zpracování (například výpočet) obdržených dat do výsledných hodnot do grafů a tabulek. V případě simulací je toto již prováděno v rámci výpočtu automaticky a výsledné grafy s danými závislostmi veličin jsou okamžitě k dispozici. Manipulace se

stovkami tisíců dat z experimentálního měření a jejich zpracování je časově extrémně náročné, proto se dává přednost numerickým simulacím jako prvního kroku a následně pak ověření této simulace v praxi. Opačný postup, tedy obsáhlý experiment děje a poté modelování děje je neekonomické jak z hlediska časového, tak materiálového a v neposlední řadě z hlediska finančního. Jako příklad si můžeme uvést jednoduchou situaci – nové modely aut nevznikají tak, že bychom nejprve auto vyrobili jako celek a pak dodatečně nakreslili, provedli pružnostně – pevnostní analýzy, materiálové analýzy, výkonové analýzy, design, ergonometrii, apod., právě naopak.



CD-ROM

V následujícím textu jsou popsány jednotlivé děje z oblasti sdílení tepla a proudění, které se odkazují na matematické simulace, a které máte k dispozici jako nedílnou součást těchto skript.

Je pro Vás připraveno celkem 16 animací, které byly vytvořeny pomocí numerické simulace v příslušných softwarech. Autoři skript mají za to, že názorná ukázka 16 animací, 16 různých tepelných dějů, povede nejen ke snadnějšímu pochopení modelování obecně, ale také ke snadnějšímu představení si jednotlivých dějů.

Každá numerická simulace je popsána, je uvedeno i grafické schéma. Proto si nejdříve pozorně přečtěte komentář k jednotlivým animacím, abyste věděli, co za děj probíhá a která veličina je sledována. Poté si animaci pusťte.

V závěru jsou uvedena 3 videa – týkající se ohřevu a ochlazování materiálu a transformace energie.

Animace 1 a 2 -Výměník tepla

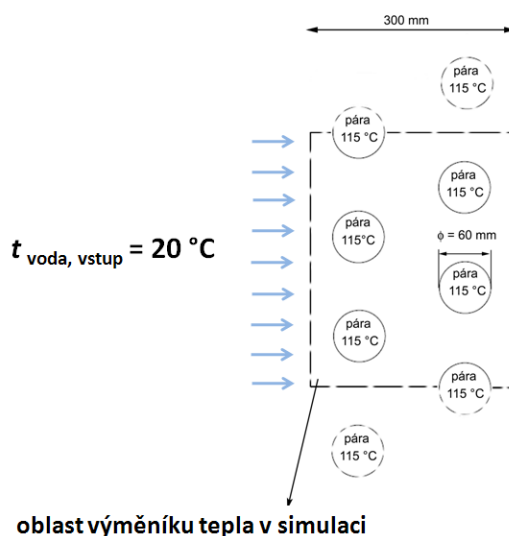
V animaci 1 a 2 je příklad aplikace numerické simulace, která je zaměřena na zmapování situace běžné u kotlů, kde dochází ke generování páry. Vzniklá pára je dále využita ve výměníku tepla.

Z matematického hlediska je předpokládán laminární charakter proudění ($Re = 100$). Simulace je provedena na vyznačené oblasti výměníku tepla (obr. **SIM01**), přičemž je předpokládána periodicitu podmínek s ohledem na další trubky výměníku. Animace

zachycuje řez trubkovým výměníkem, který je tvořen dvěma řadami trubek o délce 1 m, uvnitř kterých proudí vodní pára o teplotě 115 °C. Trubky jsou obtékány vodou, která má teplotu 20 °C.

Mezi povrchové podmínky patří konstantní teplota vnitřních stěn trubek, další podmínkou je konstantní hmotnostní průtok ($0,05 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$) protékající vody.

Fyzikální podmínky: součinitel tepelné vodivosti vody $\lambda = 0,6 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$, měrná tepelná kapacita vody $c_p = 4182 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, hustota vody $\rho = 998,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.



Obr. SIM01 Příčný řez výměníkem

Animace 1. Uvádí *rychlostní profil* proudící vody výměníkem. Tento je značně ovlivněn teplotou a taktéž i geometrií samotného výměníku. Z animace je patrné, že maximálních rychlostí je dosahováno mezi trubkami, přičemž v oblastech za trubkou (vzhledem ke směru proudění zleva doprava) dochází ke vzniku turbulencí, které se projeví značně rozdílnými hodnotami dosahovaných rychlostí.

Animace 2. Přináší informace o rozložení *teplotního pole*. Je zřejmé, že teplota v kapalině vzrůstá z důvodu sdílení/přestupu tepla z trubek; teplejší voda se hromadí v blízkosti trubek, kde jsou patrné i náznaky zmiňovaných (turbulentních) vírů, dále pak tyto oblasti opouští, zatímco úzký proud kapaliny je pak veden dále přes výměník.

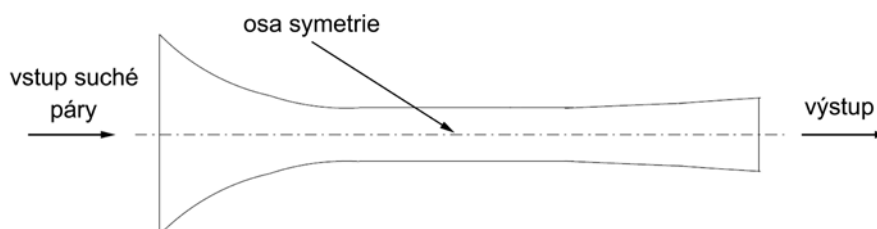
Animace 3, 4, 5, 6, 7 - Lavalova tryska

V energetice zejména v oblasti parních turbín je velmi důležité znát při návrhu a konstrukci chování vlhké páry, která se používá jako média k roztáčení lopatek turbín. Vlhká pára je směs nasycené páry a jemných kapiček vody, které se tvoří při rychlé kondenzaci páry. Simulace je zaměřena na problematiku nerovnoměrné kondenzace této páry.

Pro tento případ kondenzace byla využita Lavalova tryska (obr. SIM02), která umožňuje díky své konstrukci dosahovat vysoké rychlosti proudícího média. Tato úloha je opět simulována jako 2-D úloha, neboť použitá geometrie je osově symetrická.

Jako médium, jež vstupuje do Lavalovy trysky s rychlostí $53 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ je uvažována suchá pára o teplotě 387 K (114 °C). S tím, jak proudění akceleruje a proniká hrdlem trysky, začíná se objevovat rychlá kondenzace kapiček vody. Suchá pára se nejprve podchladí, a pak začne vznikat dvoufázová směs páry (plynná fáze) a jemných kapiček vody (kapalná fáze).

Protože kondenzace kapiček vody v trysce ovlivní i ostatní parametry je úloha je rozdělena do dvou různých variant, přičemž první spočívá v tom, že není uvažována kondenzace jemných kapiček vody. Druhá varianta pak předpokládá zmiňovanou kondenzaci jemných kapiček.



Obr. SIM02 Podélný řez Lavalovou tryskou

Varianta bez uvažování kondenzace na výstupu z trysky.

Animace 3. Tato sekvence přináší informace o *Machově kritériu*. Jak je patrné, maximální hodnota Machova čísla je 1,77, a to v oblasti výstupu páry z trysky. Charakteristický tvar kontur ve vstupní části trysky je typickým rysem právě pro Lavalovu trysku.

Animace 4. Dalším důležitým a sledovaným parametrem při použití této trysky je *rozložení teploty* v trysce, a to nejen s ohledem na zjištění podmínek vedoucích k potenciální kondenzaci. Z výsledků je evidentní pokles teploty média mezi vstupem a výstupem z trysky až o 128 K.

Varianta s uvažováním kondenzace jemných kapiček vody.

Animace 5. Na této sekvenci je doloženo předešlé tvrzení o vlivu teploty na potenciální kondenzaci jemných kapiček vody. Jak je patrné, ke kondenzaci dochází na výstupní straně trysky, což odpovídá i předcházejícímu zjištění o poměrně vysokém poklesu teploty právě v těchto oblastech trysky.

Animace 6. O ovlivnění ostatních parametrů z důvodu kondenzace kapiček vody již bylo zmíněno výše. Mezi jinými došlo i ke změně velikosti a profilu rozložení *Machova čísla*. Kdy v případě této varianty je dosaženo $Ma = 1$ až na výstupu ze středové části trysky, oproti případu, kdy kondenzace uvažována nebyla, kde je tato hodnota Machova kritéria dosahována již na počátku středové části trysky.

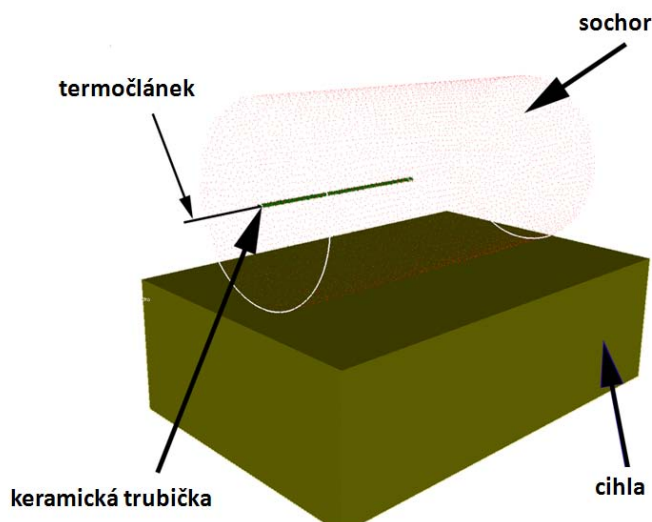
Animace 7. Mapuje situaci v *rozložení teplotního pole* v trysce. I zde je poměrně značný rozdíl v rozložení teplot po průřezu ve srovnání s variantou bez uvažování kondenzace kapiček vody. Zatímco v případě kondenzace kapiček je oblast minimálních teplot situována do výstupní oblasti středové části trysky. V případě, kdy kondenzace uvažována nebyla, jsou minima teplot zřejmá až na výstupu z trysky. Rovněž rozdíl teplot na vstupu a výstupu z Lavalovy trysky mezi oběma případy je rozdílný. V případě uvažování kondenzace kapiček vody je okolo 90 K.

Animace 8 - Laboratorní měření teploty při ohřevu sochoru

Jedná se o modelový případ ohřevu sochoru z oceli 14NiCrMo13 prováděný v elektrické peci. Ohříváný sochor leží na nístěji, jež je vyzděna žárovzdorným materiálem. Ve středu sochoru, po jeho délce, je vložena keramická trubička, uvnitř které je termočlánek. Tímto termočlánkem je měřena teplota středových oblastí ohříváného sochoru. Z důvodu vhodných materiálových vlastností sochoru je uvažován ohřev při konstantní teplotě pece 1200 °C, přičemž počáteční (sázecí) teplota sochoru do pece je 20 °C.

Animace 8. Přináší přehledné informace o *teplotním poli* sochoru při jeho ohřevu. V případech ohřevu hutního materiálu pro další využití například při tváření či dalšího

tepelného zpracování je nezbytné znát rozložení teplot v ohřívaném materiálu. Zejména pak skutečné teploty mezi středovými oblastmi a povrchovými oblastmi ohřívaného materiálu. Simulace přibližuje problematiku laboratorního měření teploty středových vrstev ohřívaného materiálu (obr. SIM03). Ohřívaný sochor je uložen na žárovzdorném materiálu (cihla) a spolu s termočlánkem a keramickou trubičkou, která obklopuje termočlánek, je sázen do ohřívací pece. Pro názorný příklad je zpracován pohled na rovinu procházející středem sochoru, za účelem zachycení jednotlivých oblastí teplot po průřezu. Z výsledků je patrné, že při ohřevu dochází ke vzniku nerovnoměrného teplotního pole, které je způsobeno materiálovými vlastnostmi samotného sochoru. Toto nerovnoměrné rozložení teplot dokazuje rozdílný charakter rychlosti nárůstu teploty vzhledem ke geometrii sochoru, kdy je patrné že rozdíl teplot mezi středovými a povrchovými vrstvami materiálu může u daných rozměrů a materiálu dosahovat cca 100 °C. Tento poznatek je podložen i přiloženou teplotní závislostí na čase, která přibližuje rozdíl teplot mezi povrchem sochoru a místem, kde se termočlánek dotýká sochoru (místo měření). Je vidět, že rozdíl teplot se časem začíná snižovat teprve po cca 300 sekundách, přičemž k úplnému vyrovnání teplot povrchu a středu sochoru dojde po 650 sekundách.

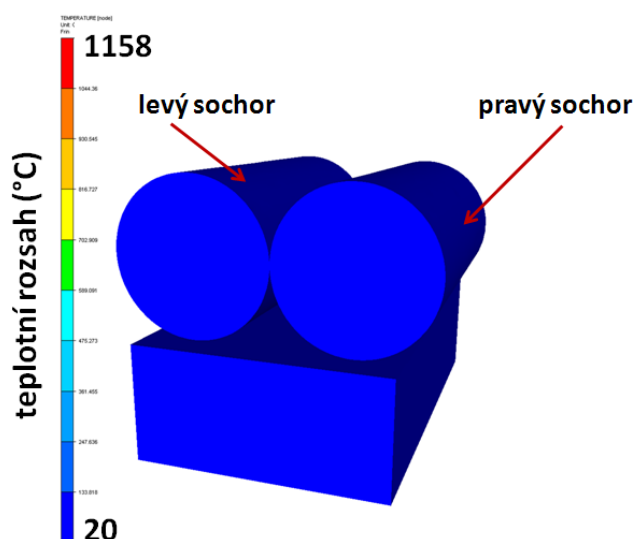


Obr. SIM03 Schéma laboratorního měření teploty ohřívaného sochoru

Animace 9 - Ohřev dvou sochorů

V praxi je běžnější případ ohřevu většího počtu polotovarů zároveň (obr. SIM04) v jednom ohřivacím zařízení (pec). Některé pece jsou konstruovány tak, že ohříváný materiál je ve vzájemném kontaktu. To s sebou přináší i jiné rozložení teploty po průřezu materiálu respektive jiný požadovaný čas k ohřevu.

Animace je rovněž zaměřena na faktor rozdílného povrchu materiálu jednotlivých sochorů. Kdy levý sochor je definován vyšším součinitelem přestupu tepla povrchem sochoru (nezokujený povrch) $\alpha_c = 20\,000\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. Pravý sochor je uvažován se zokujeným povrchem (nižší součinitel přestupu tepla $\alpha_c = 2000\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$). Kromě tohoto přestupu tepla dochází ještě k vzájemnému ovlivnění teplotního pole mezi oběma sochory. Sázecí teplota (počáteční teplota) sochorů je $20\text{ }^\circ\text{C}$ a teplota pece $1200\text{ }^\circ\text{C}$.



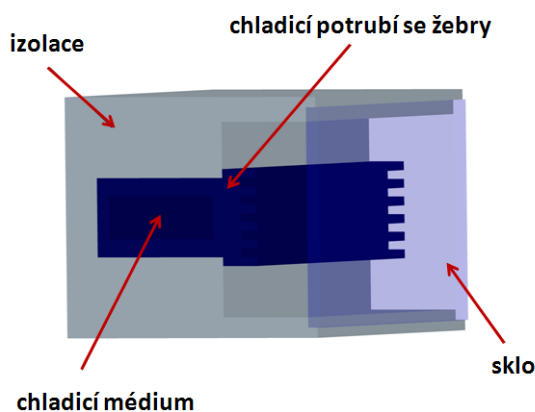
Obr. SIM04 Ohřev dvou sochorů – stav na počátku ohřevu.

Animace 9. Tato animace zachycuje problematiku ohřevu hutního materiálu v pecích, kde se jednotlivé polotovary vzájemně dotýkají. Tímto vzájemným dotykem dochází k ovlivňování teplotního pole. Mezi další faktory lze pak zmínit i ovlivnění ohřevu z důvodu vzájemného kontaktu s podložkou (nístějí pece). Konkrétní situace je tvořena dvěma sochory o průměru

100 mm a délce 200 mm. Jak je vidět po 480 sekundách je teplota obou sochorů v celém objemu shodná (1158 °C) kromě stykové plochy levého sochoru a podložky, kde v místech styku je teplota v oblasti 870 °C. Naproti tomu pravý sochor, jenž je definován nižším součinitelem přestupu tepla do podložky (horší kontakt s podložkou) vykazuje homogenní rozložení teploty v celém svém objemu. U tohoto sochoru je zřetelné jen nerovnoměrné rozložení teplotních iso-čar způsobené kontaktem s levým sochozem.

Animace 10 - Přestup chladu v chladicím potrubí s žebry

V této animaci je modelován přestup chladu z potrubí do okolního prostředí (obr. SIM05). Toto je typický případ chladniček, nebo chladicích boxů. V simulaci byla uvažována chladicí trubka z Cu s těmito vlastnostmi: součinitel tepelné vodivosti $\lambda = 385 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$, hustota $\rho = 8700 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, měrná tepelná kapacita $c_p = 385 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\text{K}^{-1}$. Uvnitř této trubky se nachází chladivo mající teplotou 0 °C. Stěny trubky jsou izolovány. Izolována není žebrovitá část, která je definována součinitelem přestupu tepla $\alpha_c = 10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\text{K}^{-1}$. Okolí trubky má teplotou 20 °C.



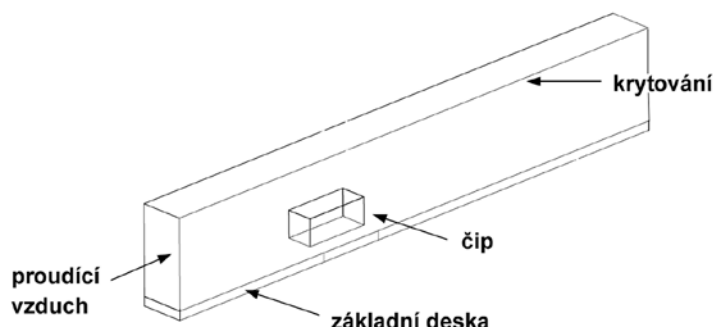
Obr. SIM05 Detail chladicího boxu

Animace 10. V animaci je vyobrazen 2-D pohled na řez trubkou se žebry, která je připevněna na izolovanou stěnu. Uvnitř této trubky se nachází chladivo o teplotě 0 °C. Konkrétní přestup chladu je zřejmý z přiložené teplotní škály. Celý proces je modelován jako přechodný děj (časově závislý). Z výsledků plyne, že po cca 4 hodinách je teplota na koncích žeber v rozmezí 2,7 – 3,1 °C.

Animace 11 až 12 - Vzduchové chlazení základní desky počítače (nucená konvekce)

Informace o rozložení teplotního pole u elektronických součástí jsou velmi důležité z hlediska umístování jednotlivých součástek. V případě nedostatečného chlazení by mohlo docházet k jejich přehřívání, resp. destrukci.

Animace přináší informace o rozložení teplotního pole v oblasti integrovaného obvodu (čip) na základní desce počítače při jeho provozu. Tento integrovaný obvod je oboustranný a při svém provozu dochází k vývinu tepla jako důsledek přeměny elektrické energie napájející tento obvod. Kromě toho, že je tento čip umístěn na základní desce, je tento ještě obklopen krytováním externě chlazeným (obr. SIM06). V tomto případě je uvažován jak přenos tepla vedením v integrovaném obvodu samotném a do desky, na které je pevně umístěn, tak i přenos tepla do okolí (konvekce). Okolí je tvořeno proudícím (ochlazujícím) vzduchem, jenž je „nuceně“ k tomuto účelu (ochlazování) přiváděn. Předpoklad je založen na tom, že samotný obvod produkuje tepelnou energii 2 W. Chladící vzduch je pak konkretizován svou teplotou (25 °C) a rychlostí proudění v (0,5 m.s⁻¹; 1,5 m.s⁻¹ a 3,5 m.s⁻¹).



Obr. SIM06 Schematické znázornění sestavy základní desky s čipem

V prvním případě ($v = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$) dochází sice k částečnému ochlazení integrovaného obvodu, nicméně na straně obvodu protilehlé ke směru proudícího vzduchu bude docházet k jeho přehřívání. Maxima teplot dosahované v této oblasti se pohybují okolo teploty 155 °C. Dalším negativním faktorem je pak i teplotní pole v okolí tohoto obvodu, kdy teploty ani v relativně velké vzdálenosti od čipu neklesají pod 60 °C. Tyto faktory jsou důvody vedoucími k závěru, že vzduchové chlazení charakterizované uvedenou hodnotou rychlosti proudění není dostatečné. Při zvýšené rychlosti proudění ($v = 1,5 \text{ m.s}^{-1}$) je již evidentní pokles dosahovaných maxim teploty, kdy její píkova hodnota nepřesahuje 128 °C. Jiný je taktéž i profil teplotního pole zejména na výstupní straně vzduchu (za čipem). V případě nejvyšší

rychlosti proudění vzduchu ($v = 3,5 \text{ m.s}^{-1}$ – **Animace 11**) je vidět pokles maximální teploty až na $118 \text{ }^\circ\text{C}$. Kromě uvedeného se také výrazně změnil profil „vyšších“ teplot za čipem.

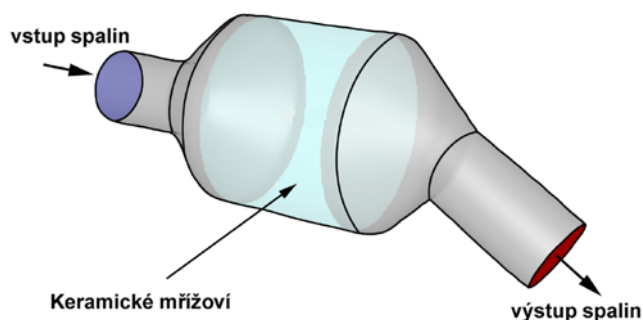
Z porovnání všech tří případů plyne zjištění, že s rostoucí rychlostí proudění chladícího vzduchu dochází k posuvu oblasti s maximální teplotou směrem proti proudícímu vzduchu. Příčinou tohoto posuvu je nárůst chladícího efektu způsobeného intenzivnějším odvodem (přestupem) tepla ze všech stran čipu. Tato intenzita narůstá s rostoucí rychlostí proudění, což je způsobeno intenzivnější konvekcí a jiným zakřivením proudnic vzduchu (snižuje se oblast malého přestupu tepla vzniklá obtékáním čipu). Toto dokládá i animace proudícího vzduchu (**Animace 12**), kde je vidět jak se jednotlivé proudnice deformují při prostupu přes ochlazovaný čip. Tyto vektory rychlosti jsou zbarveny dle dané rychlosti. Přestože jsou všechny vektory proudícího vzduchu na vstupu stejné jak svou velikostí, tak i barvou (rychlostí) již po krátké době proudění dojde ke vzniku charakteristického profilu „vlny“. K tomu dochází zejména v důsledku zbrzdění horních a spodních vrstev proudícího vzduchu zapříčiněného třením mezi jednotlivými proudnicemi a povrchem desky nesoucí čip, respektive kanálu obepínajícího čip. Je evidentní, že byť je rychlost proudícího vzduchu na vstupu $0,5 \text{ m.s}^{-1}$ při průchodu přes čip jsou vrstvy vzduchu obtékající čip mnohem pomalejší. Pohybují se rychlostí do cca $0,3 \text{ m.s}^{-1}$, naproti tomu dochází u středových vrstev ke zrychlení. Toto zrychlení je důsledkem zmenšení „světlého průřezu“ v okamžiku přechodu vzduchu přes čip (platnost rovnice kontinuity).

Animace 13, 14 – Rychlost proudících spalin v katalyzátoru automobilu

Katalyzátory (součást automobilů, potřebná ke snížení emisní zátěže) jsou běžně používány jak u benzínových, tak i u dieselových motorů. Jejich princip spočívá v přeměně zdraví nebezpečných látek (např. CO, NO_x, nespálené uhlovodíky) na látky méně škodlivé či neškodné. Tyto emise jsou přiváděny do katalyzátoru, ve kterém se nachází velmi jemné keramické mřížoví, na kterém je nanesen kovový katalyzátor (např. Pt, nebo Pd). Skrze toto mřížoví proudící spaliny procházejí, reagují a postupují dále k výfuku (obr. **SIM07**). Z uvedeného plyne, že správný návrh katalyzátoru je základním předpokladem pro jeho správnou funkci.

Problematika věnovaná vlivu katalyzátorů, je zpracovaná ve dvou animacích. První (**Animace 13**) je zaměřená na zjištění homogenity rychlostního pole při průchodu spalin skrze

mřížoví. Druhá pak na informace nutné ke zjištění *poklesu tlaku* uvnitř katalyzátoru. Je evidentní, že díky zmiňovanému mřížoví, které je uloženo ve válcovité části katalyzátoru s největším průměrem dochází ke značnému zpomalení rychlosti proudících spalin. Toto je nezbytné dosáhnout zejména proto, aby mohly tyto spaliny katalyticky reagovat s kovovým povlakem naneseným na mřížoví. V animaci jsou zachyceny tři řezy tímto mřížovím. Z těchto řezů vyplývají nižší dosahované rychlosti proudících spalin směrem k výstupní části katalyzátoru. Dále taktéž jejich klesající rychlost směrem od středu katalyzátoru k jeho obvodu. Maximální rychlosti spalin jsou tedy dosahovány v centrálních oblastech katalyzátoru, a sice okolo hodnot $7 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, což je hodnota 3x nižší než na vstupu do katalyzátoru. Z tohoto poznatku lze soudit, že takto dimenzovaný katalyzátor bude vhodný pro jeho zamýšlené použití.



Obr. SIM07 K simulaci automobilového katalyzátoru

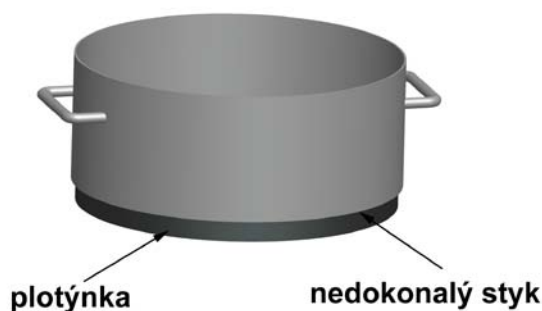
Animace 14 zpracovává tentýž problém, nicméně zaměřuje se především na problematiku tlakového rozložení proudících spalin. Tlakový spád nám dává možnost sledovat, zdali nebude díky instalovanému mřížoví resp. tvaru katalyzátoru docházet k problémům. Jedná se zejména situace, kdy v případech velkého tlakového spádu může tento faktor negativně ovlivňovat chod spalovacího motoru (nedostatečná kapacita odvodu spalin). Z výsledků animace je viditelné, že při průtoku spalin katalyzátorem dochází k poklesu spalin na výstupu z katalyzátoru. Ve srovnání se vstupní částí je to maximálně cca 10-ti násobný pokles, nicméně toto je patrné pouze v lokálních oblastech.

Animace 15 – Přestup tepla v ohřívací plotýnce elektrického sporáku

Tato animace osvětluje problematiku přestupu tepla v ohřívací plotýnce elektrického sporáku (obr. SIM08). Konkrétně se jedná o transformaci elektrické energie na tepelnou. Jsou

uvažovány tyto podmínky: plotýnka je umístěna na sporáku při okolní teplotě 20 °C, plotýnka je ocelová přičemž součinitel tepelné vodivosti materiálu plotýnky je $60 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, hustota oceli je definována hodnotou $7800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Tato konkrétní animace uvažuje navíc případ, kdy mezi povrchem plotýnky a ohřivaným tělesem (například hrnec, apod.) není dokonalý styk (například deformovaný povrch plotýnky, nečistoty apod.).

Je evidentní, že v takovém případě dochází při ohřevu k velkým ztrátám tepla. Zatímco ve středu plotýnky dosahuje teplota ve svém maximu hodnot okolo 110 °C, na jejím povrchu je maximální hodnota teploty do 90 °C. Teplotní pole tvořené izotermami vzniká v důsledku přestupu tepla z jisté části do okolního prostředí. Jejich tvar je však ovlivněn i umístěním topného prvku vzhledem ke geometrii ocelového pouzdra.



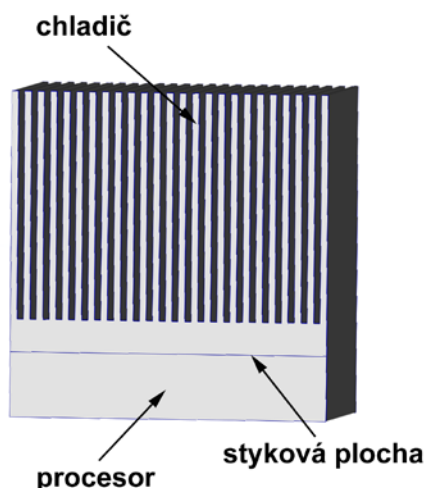
Obr. SIM08 Přestup tepla plotýnkou do hrnce.

Animace 16 – Pasivní chlazení počítačového procesoru

Je věnována tematicky vzniku tepla při přeměně elektrické energie. Tento konkrétní případ mapuje vznik tepla a jeho odvod z počítačového procesoru, na kterém je umístěn hliníkový pasivní chladič. V současných počítačích jsou instalovány velice výkonné a rychlé procesory, což bohužel znamená také jejich vyšší zahřívání. Běžné teploty procesorů dosahují hodnot přes 75 °C. To s sebou však přináší i zvýšenou potřebu chlazení těchto součástek z důvodu jejich možné teplotní destrukce. Zejména ekonomické a konstrukční důvody jsou těmi, které stojí za snahami v oblasti vývoje „pasivních chladičů“.

Aplikovaný případ je definován teplotou procesoru (75 °C) na kterém je umístěn hliníkový žebrový chladič (obr. SIM09). Vzhledem k tomu, že tato součástka je velmi kvalitně připravena z hlediska dosahovaných drsností povrchu, je uvažován dokonalý styk

mezi chladičem a povrchem procesoru. Součinitel tepelné vodivosti λ chladiče je definován hodnotou $160 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, měrná tepelná kapacita $c_p = 460 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Mezi žebry chladiče a okolním prostředím je definována konvekce, podobně jako u bočních stěn procesoru a okolním prostředím.



Obr. SIM09 Počítačový procesor a chladič při chlazení.

Video 1 - Homogenizační žihání odlitku slitiny AZ63

Přiložené **video 1** je zpracováno s cílem přiblížit nuance mezi středovými a povrchovými vrstvami ohřívávaného materiálu. K tomuto účelu bylo využito hořčíkové slitiny AZ63 na bázi Mg-Al-Zn. Pro tuto slitinu je definováno několik normovaných předpisů, týkajících se tepelného zpracování prováděného za účelem homogenizace mikrostruktury. Struktura po odlití této slitiny je charakteristická svým dendritickým uspořádáním mikrostruktury. Nicméně takováto strukturní stavba není příliš výhodná, pokud jde o následné zpracování tohoto materiálu například pomocí některé z tvářecích technik (válcování, kování, protlačování, apod.). Pro to, aby bylo získáno výhodnějšího mikrostrukturní uspořádání (potlačení možnosti vzniku lomu) se provádí zmíněné tepelné zpracování - žihání označované jako T4.

Ve **video 1** je zřejmé, že i když obě oblasti měly stejnou výchozí hodnotu teploty, tj. cca $20 \text{ }^\circ\text{C}$ během ohřevu na požadovanou teplotu vznikl teplotní rozdíl mezi teplotou ve středu materiálu a povrchem ohřívávaného materiálu až $220 \text{ }^\circ\text{C}$. Po dosažení požadované teploty v peci cca $340 \text{ }^\circ\text{C}$ se nárůst teploty v povrchových vrstvách zastavil a hodnota teploty ve středových

vrstvách se pomalu přibližovala teplotám v povrchových vrstvách. Jak je vidět na konci filmu po otevření pece teplota povrchových vrstev prudce poklesla až na hodnotu cca 301 °C. Tento pokles byl vyvolán tím, že po otevření pece došlo ke skokovému ochlazení prostoru nístěje pece, kde byl umístěn ohříváný materiál. Je ale třeba poznamenat, že zatímco povrchové vrstvy reagovaly na změnu teploty okolí velice rychle, středové vrstvy naopak svou hodnotu teploty zachovávaly stejnou. Tyto faktory jen dokládají skutečnost, že hořčík, resp. jeho slitiny se vyznačují velmi špatným přestupem tepla, který je částečně dán jejich fyzikálními vlastnostmi a částečně i kvalitou vnitřní mikrostruktury.

Video 2 – Chladnutí tepelně zpracovaného odlitku (přirozená konvekce)

Video 2 je věnováno problematice ochlazování odlitku po tepelném zpracování. Tato laboratorní simulace je provedena tak, že ve středové části a taktéž i těsně pod povrchem polotovaru ze slitiny označované jako AZ63, což je slitina na bázi Mg-Al-Zn, jsou instalovány kalibrované termočlánky s velmi rychlou odezvou. Jejich úkolem bylo přinášet informace o rozložení teploty v ochlazovaném polotovaru, jenž byl v předchozí operaci homogenizačně žíhán po dobu 18 hod na teplotě 418 °C v peci, ve které byla po celou dobu procesu žíhání inertní argonová atmosféra. Po ukončení tohoto žíhacího režimu byl zpracováván polotovar vytažen z pece a ochlazován na vzduchu.

Pro jasnou dokumentaci byly oba termočlánky připojeny k měřicí ústředně, která převádí signál z těchto termočlánků na konkrétní hodnotu teploty. Je zřejmé, že při podobném zpracování dochází ke vzniku teplotního gradientu mezi středovými vrstvami a vrstvami povrchovými. Tento gradient může znamenat ve výsledku jiné vlastnosti resp. jiné chování středových a povrchových vrstev takto zpracovaného materiálu, což plyne právě z rozdílného poklesu teplot ve zmiňovaných oblastech. To je jeden z důvodů, proč se tepelné zpracování u konstrukčně či ekonomicky náročných součástí musí řídit například řízeným ochlazováním v peci s definovaným poklesem teploty v časovém kroku.

Při analýze situace při ochlazování je zřetelné, že situace se diametrálně liší od případu předchozího (**video 1**). To znamená, že při ochlazování nevzniká mezi oběma monitorovanými oblastmi odlitku výraznější teplotní rozdíl. Tento poznatek lze vysvětlit tím, že při ochlazování odlitku je hodnota teploty ovlivňována rychlostí chladnutí středových partií odlitku. Jinými slovy odlitek bude chladnout tak rychle, jak rychle bude chladnout jeho

nejteplejší část (středové partie). Což je přesně opačný výsledek než v předešlém případě, kdy se středové partie ohřívaly tak rychle, jak rychlý byl přestup tepla z pecní atmosféry skrze povrchové oblasti směrem do středu.

Zjištěné skutečnosti znamenají v praktických podmínkách stanovovat doby tepelného zpracování v řádek desítek nebo až stovek hodin v závislosti na geometrii odlitku a jeho velikosti. Důvodem těchto nutností jsou právě uvedené faktory.

Video 3 - Transformace tepelné energie na mechanickou a elektrickou.

Konkrétní aplikace přeměny tepelné energie na mechanickou práci, resp. přeměna na energii elektrickou je zpracována na **videu 3**. Jedná se o modelový případ laboratorního Stirlingova motoru. Tepelná energie je získávána zapálením pevného lihového podpalovače, běžně dostupného v obchodech. Tepelná energie plamene ohřívá teplou část Stirlingova motoru, prohřívá ji. Stirlingův motor pracuje na principu rozdílu teplot pracovního média uzavřeného ve válci – v tomto případě vzduchu. Vlivem rozdílných teplot vzduchu dochází k jeho expanzi, ten tlačí na píst, jenž se nachází nad ním. Tento píst je spojen klikovým mechanismem se setrvačником, který je následně roztáčen. Poté, co ohřátý vzduch opustí ohříváný prostor válce, prochází komorou, která je ochlazována okolním vzduchem, čímž dochází k jeho smršťování. Tento proces napomáhá posuvu pracovního pístu a zároveň umožňuje opakování celého procesu tím, že díky konstrukčnímu uspořádání se vrací zpět do ohříváného prostoru motoru. Pokud je na setrvačnik umístěn výrobní agregát energie (např. generátor), pak lze dále převádět vzniklou mechanickou energii na energii elektrickou.

Na tomto videu 3 je vidět transformaci tepelné energie na energii mechanickou a poté pomocí dynamu na energii elektrickou. To je potvrzeno rozsvícením vlákna žárovky.



Shrnutí pojmů kapitoly 5

Výpočetní/matematické modely se dělí na:

- Stochastické modely - pracují s náhodnými procesy a veličinami.
- Deterministické úlohy – řeší matematický model, který jednoznačně popisuje zkoumaný děj/proces.

- Analytické modely – umožňují získat řešení ve tvaru funkce času a souřadnic. Metodami jsou – metoda separace proměnných, přibližné analytické metody Besselových funkcí, apod. Výhodou je rychlost výpočtu a malé nároky na hardware počítače, což ale vede ke značnému zjednodušení skutečných dějů, tedy značné zjednodušení úlohy. (Analytické) řešení je složité – výpočty integrálů apod. S rozvojem výpočetní techniky jejich význam klesá.
- Numerické modely – jejich podstatou je diskretizace spojitých veličin, která vede k vyjádření diferenciálních rovnic jako soustavy algebraických rovnic. Řešení je nalezeno v konečném počtu diskrétních míst. Numerické metody nabývají na významu zvláště s rozvojem výkonných počítačů. Nejčastěji používané metody jsou metoda konečných prvků, metoda konečných objemů, metoda konečných diferencí, metoda hraničních prvků, nebo metody založené na základech neuronových sítích.

Důležité numerické metody:

- Variační metody – mezi tyto metody patří metoda konečných prvků (MKP/FEM). Řešená oblast se rozdělí na konečný počet podoblastí – konečných prvků, kde je neznámá veličina přiblížena tzv. interpolační tvarovou funkcí. Tato funkce je spojitá v rámci jednoho prvku a definuje průběh hledané veličiny mezi jednotlivými uzly prvku. Vlastní řešení je hledáno ve tvaru minimalizace funkcionálu příslušného dané úloze vzhledem k této veličině. – výsledkem je soustava algebraických rovnic, jejichž řešením (inverze matice soustavy) jsou neznámé hodnoty parametrů tvarových funkcí, tedy také hodnot hledané funkce. Tvarová funkce se nejčastěji volí jako polynom 1. a 2. stupně. Vyšší polynomy přinášejí problémy se stabilitou řešení. Tato metoda je nejrozšířenější pro modelování mechanických a termomechanických úloh.
- Diferenční metody – mezi tyto metody patří metoda konečných objemů (FVM) a metoda konečných diferencí. Diferenciální rovnice jsou vyjádřeny ve tvaru soustavy diferenčních rovnic. Přesnost řešení je dána diferenčním schématem (explicitní, implicitní) a hustotou sítě. Tyto metody umožňují využití i pro velmi nelineární sdružené děje/problémy, za použití rozsáhlých sítí. Metody se uplatní v tepelných výpočtech a výpočtech proudění tekutin (i vícefázové proudění), výpočty fázových přeměn, spalování, apod.



Otázky kapitoly 5

122. Popište jednotlivé tepelné úlohy. Jak se mezi sebou liší?
123. Co je to analytická metoda?
124. Mezi jaké úlohy patří variační metody?
125. Proč jsou dnes upřednostňovány numerické metody před analytickými metodami?
126. Vysvětlete rozdíl mezi explicitní a implicitní numerickou metodou.
127. Co je cílem simulace (modelování)?
128. Rozdělte typy modelů a krátce je popište.
129. Jak byste prováděli simulaci tepelného děje v daném softwaru?
130. Uveďte některé softwary pro simulaci. Máte s některými i osobní zkušenost?
131. Vysvětlete důvody proč se dnes tak hojně využívají počítačové simulace se speciálními výpočtovými softwary.



Řešený příklad 2.1

Zadání:

Rovinnou stěnu je třeba tepelně izolovat tak, aby ztráty tepla povrchem nepřesáhly hodnotu $440 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Teplota povrchu pod izolací $t_1 = 450 \text{ }^\circ\text{C}$, teplota vnějšího povrchu $t_2 = 65 \text{ }^\circ\text{C}$.

Stanovte tloušťku izolace s pro dva případy tepelných izolací:

- lehčený šamot
- vermikulitové desky.

Řešení:

Z matematického hlediska se jedná o jednoduchou rovinnou stěnu s I. okrajovou podmínkou („znám teplotu na povrchu stěny“). Použijeme tedy jednoduché matematické vyjádření pro měrný tepelný tok:

$$q = \frac{\lambda}{s}(t_1 - t_2) \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\lambda}{q}(t_1 - t_2) \quad (\text{m}).$$

Znamé veličiny ze zadání: měrný tepelný tok $q = 440 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$,

$t_1 = 450 \text{ }^\circ\text{C}$ (na jednom povrchu desky),

$t_2 = 65 \text{ }^\circ\text{C}$ (na druhém povrchu desky).

Dále známe dva materiály a pro ně určíme součinitele tepelné vodivosti λ z tabulky (Obr. **RES01**). Na tomto obrázku je jak grafické znázornění, tak lineární závislost jednotlivých materiálů.

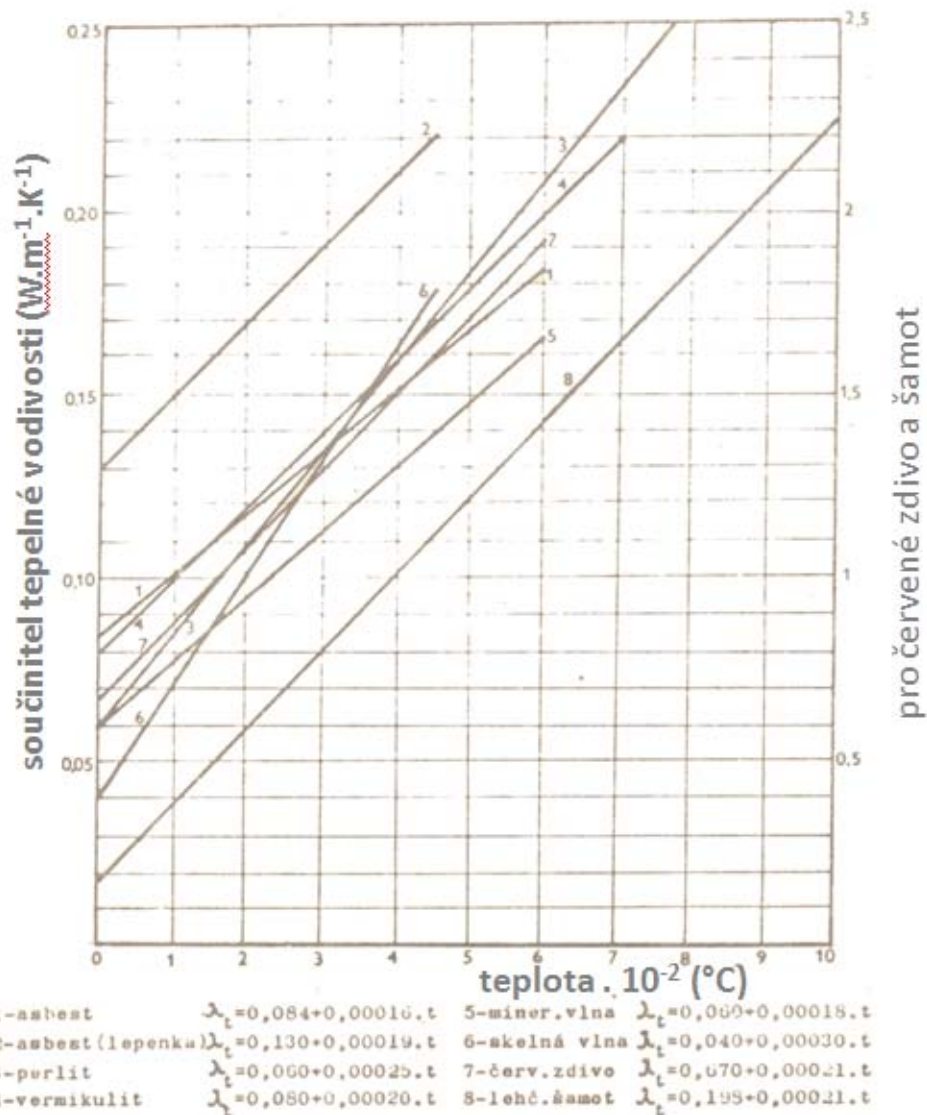
Pro lehčený šamot je lineární závislost: $\lambda_t = 0,198 + 0,00021 \cdot t$

Pro vermikulitové desky je lineární závislost: $\lambda_t = 0,080 + 0,00020 \cdot t$,

Za t dosadíme průměrnou teplotu: $t = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{450 + 65}{2} = 257,5 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Výpočet pro případ a)

$$s = \frac{\lambda_{\text{lehcený šamot}}}{q} (t_1 - t_2) = \frac{0,198 + 0,00021 \cdot 257,5}{440} (450 - 65) = 0,22 \text{ m.}$$



Obr. RES01. Součinitel tepelné vodivosti pro izolační (žárovzdorné) materiály.

Výpočet pro případ b)

$$s = \frac{\lambda_{\text{vermikulit}}}{q} (t_1 - t_2) = \frac{0,080 + 0,00020 \cdot 257,5}{440} (450 - 65) = 0,12 \text{ m.}$$

Odpověď: Při stejném měrném tepelném toku je tloušťka izolace pro lehčený šamot rovna 22 cm, pro vermikulitové desky pak 12 cm. Vermikulit má nižší součinitel tepelné vodivosti, bude tedy lépe izolovat desku, proto ho také méně (jako izolační materiál) použijeme.



Řešený příklad 2.2

Zadání:

Určete hustotu tepelného toku přes stěnu kotle. Vnitřní stěna kotle je pokryta vrstvou rzi o tloušťce 0,95 mm a o součiniteli tepelné vodivosti $\lambda = 0,09 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Ze strany vody je 1,4 mm tlustá vrstva kotelního kamene o $\lambda = 0,7 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Stěna kovového kotle má tloušťku 19 mm a součinitel tepelné vodivosti $\lambda = 51 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Teplota stěny ze strany vody je 165 °C, ze strany ohřevu 625 °C. Určete teploty na rozhraní vrstev.

Řešení:

Z matematického hlediska se jedná o povrchovou podmínku I. druhu pro rovinnou složenou stěnu. Použijeme tedy jednoduché matematické vyjádření pro měrný tepelný tok pro složenou stěnu:

$$q = \frac{(t_1 - t_4)}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}} \quad (\text{W.m}^{-2}).$$

Znamé veličiny ze zadání: tloušťky vrstev $s_1 = 0,95 \text{ mm}$; $s_2 = 19 \text{ mm}$; $s_3 = 1,4 \text{ mm}$.

Součinitel tepelné vodivosti: $\lambda_1 = 0,09 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $\lambda_2 = 51 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$; $\lambda_3 = 0,7 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Teplota $t_1 = 625 \text{ °C}$, $t_4 = 165 \text{ °C}$.

Výpočet:

Výpočet hustoty tepelného toku

$$q = \frac{(t_1 - t_4)}{\frac{s_1}{\lambda_1} + \frac{s_2}{\lambda_2} + \frac{s_3}{\lambda_3}} = \frac{625 - 165}{\frac{0,00095}{0,09} + \frac{0,019}{51} + \frac{0,0014}{0,7}} = 35\,581,4 \text{ W.m}^{-2}$$

Výpočet teplot na rozhraní jednotlivých vrstev

$$q = \frac{\lambda_1}{s_1}(t_1 - t_2) \Rightarrow t_2 = t_1 - \frac{q \cdot s_1}{\lambda_1} = 625 - \frac{35\,581,4 \cdot 0,00095}{0,09} = 249,41 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$q = \frac{\lambda_2}{s_2}(t_2 - t_3) \Rightarrow t_3 = t_2 - \frac{q \cdot s_2}{\lambda_2} = 249,41 - \frac{35\,581,4 \cdot 0,019}{51} = 236,15 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Odpověď: hustota tepelného toku, procházející složenou stěnou je 35 581,4 W.m-2. Teploty na rozhraní jednotlivých vrstev, rez-kotel $t_2 = 249,41 \text{ } ^\circ\text{C}$ a kotel-kámen $t_3 = 236,15 \text{ } ^\circ\text{C}$.



Řešený příklad 2.3

Zadání:

Kolik tepla za 1 hodinu ztrácí 47 m dlouhé potrubí o tloušťce stěny 8 mm. Potrubí je vyzděno šamotem o tloušťce 36 mm na vnitřní průměr 610 mm a vně je opatřeno izolací o tloušťce 56 mm. Potrubím proudí vzduch, který ohřívá stěnu na teplotu 520 °C. Vnější teplota stěny je 60 °C. Součinitel tepelné vodivosti šamotu je $\lambda = 1,119 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$, oceli $\lambda = 50,5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ a šamotové izolace $\lambda = 0,111 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. Rovněž určete teploty na rozhraní obou vrstev.

Řešení:

Z matematického hlediska se jedná o povrchovou podmínku I. druhu pro válcovou složenou stěnu. Použijeme tedy jednoduché matematické vyjádření pro měrný tepelný tok pro složenou válcovou stěnu, resp. pro teplo:

$$q = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_4)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{2\lambda_3} \cdot \ln \frac{r_4}{r_3}} \quad (\text{W.m}^{-1}),$$

Pro výpočet tepla pak platí jednoduchý výraz: $Q = q \cdot l \cdot \tau$ (J)

Pro teploty na rozhraní jednotlivých vrstev:

$$q = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_2)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-1}) \Rightarrow t_2 = t_1 - q \cdot \frac{\frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}}{\pi}$$

$$q = \frac{\pi \cdot (t_2 - t_3)}{\frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}} \quad (\text{W} \cdot \text{m}^{-1}) \Rightarrow t_3 = t_2 - q \cdot \frac{\frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2}}{\pi}$$

Znamé veličiny ze zadání: $d_{\text{potrubí}} = 610 \text{ mm}$; $l_{\text{potrubí}} = 47 \text{ m}$

Tloušťky vrstev: $s_1 = 36 \text{ mm}$ (šamot); $s_2 = 8 \text{ mm}$ (potrubí); $s_3 = 56 \text{ mm}$ (izolace)

Součinitel tepelné vodivosti: $\lambda_1 = 1,119 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\lambda_2 = 50,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\lambda_3 = 0,111 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Teploty: $t_1 = 520 \text{ }^\circ\text{C}$, $t_4 = 60 \text{ }^\circ\text{C}$.

Čas $\tau = 1 \text{ hod} = 3600 \text{ s}$.

Výpočet:

Výpočet tepla, které se ztrácí ze 47 m dlouhého potrubí za 1 hodinu

$$q = \frac{\pi \cdot (t_1 - t_4)}{\frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{2\lambda_3} \cdot \ln \frac{r_4}{r_3}} \cdot l \cdot \lambda =$$

$$= \frac{\pi \cdot (520 - 60)}{\frac{1}{2 \cdot 1,119} \cdot \ln \frac{341}{305} + \frac{1}{2 \cdot 50,5} \cdot \ln \frac{349}{341} + \frac{1}{2 \cdot 0,111} \cdot \ln \frac{405}{349}} \cdot 47 \cdot 3600 = 339,41 \text{ MJ}$$

Výpočet teplot na rozhraní mezi vrstvami:

$$t_2 = t_1 - q \cdot \frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1} = 520 - 2005,96 \cdot \frac{1}{2 \cdot 1,119} \cdot \ln \frac{341}{305} = 480 \text{ °C}$$

$$t_3 = t_2 - q \cdot \frac{1}{2\lambda_2} \cdot \ln \frac{r_3}{r_2} = 480 - 2005,96 \cdot \frac{1}{2 \cdot 50,5} \cdot \ln \frac{349}{341} = 479 \text{ °C}$$

Odpověď: Z potrubí dlouhého 47 m se každou hodinu ztrácí 339,41 MJ tepla. Teploty na rozhraní jednotlivých vrstev jsou šamot-ocel 480 °C a ocel-izolace 479 °C.



Řešený příklad 3.1

Zadání:

Vodorovným kovovým potrubím obdélníkového průřezu 220x180 mm (délka 52 m), protéká za normálních podmínek 205 m³ vzduchu za hodinu. Teplota vzduchu v potrubí je 45 °C. Jaké budou tlakové ztráty při průtoku vzduchu potrubím?

Řešení:

Z matematického hlediska budeme určovat hydraulické (tlakové) ztráty třením v daném potrubí, kterým protéká vzduch

$$p_{z,treni} = \Lambda \cdot \frac{l}{d_h} \cdot \frac{v_t^2 \cdot \rho_t}{2} \text{ (Pa)}$$

Znamé veličiny ze zadání:

rozměry kovového potrubí $a = 220$ mm, $b = 180$ mm; délka $l = 52$ m.

Teplota proudícího vzduchu: $t_{vzd} = 45$ °C; objemový průtok $Q_v = 205 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1} = 0,057 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$

Výpočet:

- určení kinematické viskozity pro proudící vzduch při teplotě 45 °C z tabulky na obr. **RES02**.

Kinematická viskozita $\nu = 1,75 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

b. určení hustoty vzduchu při 45 °C. Pro výpočet použijeme přepočtení vztah, protože známe, že hustota vzduchu $\rho_{\text{vzd},0} = 1,239 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, tedy

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \alpha \cdot t}, \text{ kde } \alpha = \frac{1}{273,15} (\text{K}^{-1}). \text{ Hustota vzduchu při teplotě } 45 \text{ °C je } 1,11 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

c) výpočet rychlosti proudění vzduchu. V tomto případě vycházíme z rovnice kontinuity

$$\begin{aligned} Q_m &= Q_v \cdot \rho_{\text{vzd}} \\ Q_v &= S \cdot v \end{aligned} \quad \text{z toho plyne, že rychlost } v = \frac{Q_m}{S \cdot \rho_{\text{vzd}}} = \frac{Q_v \cdot \rho_{\text{vzd}}}{a \cdot b \cdot \rho_{\text{vzd}}} = \frac{0,057}{0,22 \cdot 0,18} = 1,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Rychlost vzduchu při teplotě 45 °C

$$v_t = v_0(1 + \alpha \cdot t) = 1,44 \left(1 + \frac{45}{273,15} \right) = 1,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

d) určení hydraulického průřezu

$$d_h = \frac{4S}{o} = \frac{4 \cdot (a \cdot b)}{2 \cdot (a + b)} = \frac{4 \cdot 0,22 \cdot 0,18}{2 \cdot (0,22 + 0,18)} = 0,198 \text{ m}.$$

e) určení součinitele třecí ztráty Λ . Určíme Reynoldsovo kritérium Re

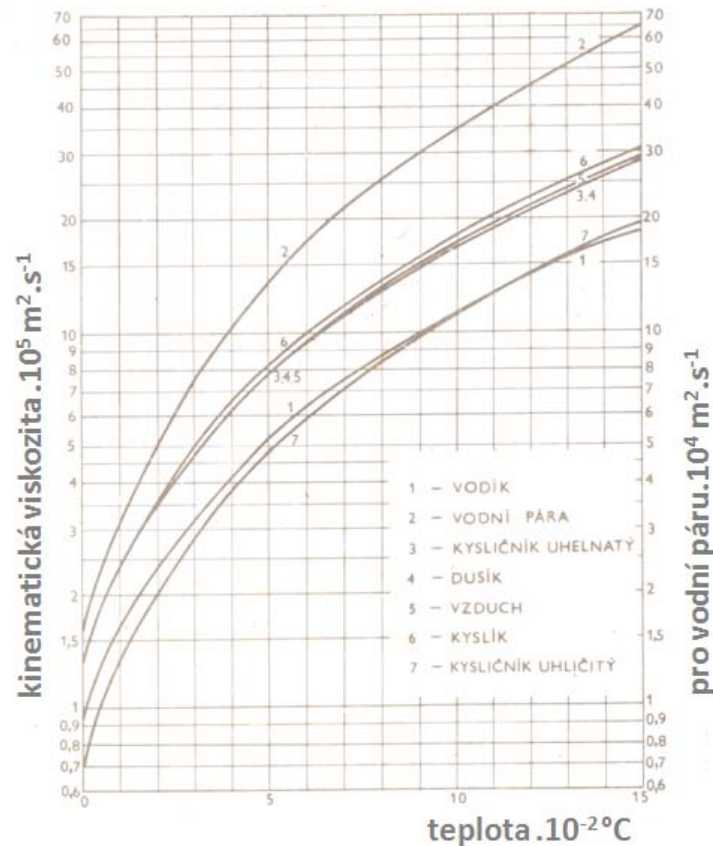
$$Re = \frac{v_t \cdot d_h}{\nu_{\text{vzd},45}} = \frac{1,67 \cdot 0,198}{1,75 \cdot 10^{-5}} = 18\,894,9$$

Pro kovové hladké potrubí platí následující vztah pro určení součinitele

$$\Lambda = \frac{A}{Re^n} = \frac{0,136}{18894,9^{0,25}} = 0,012$$

f) určení tlakové ztráty třecí

$$p_{z,\text{treci}} = \Lambda \cdot \frac{l}{d_h} \cdot \frac{v_t^2 \cdot \rho_t}{2} = 0,012 \cdot \frac{52}{0,198} \cdot \frac{1,67^2 \cdot 1,11}{2} = 4,88 \text{ Pa}$$



Obr. RES02. Kinematická viskozita plyných látek.

Odpověď: Celkové hydraulické ztráty jsou rovny 4,88 Pa.



Řešený příklad 3.2

Zadání:

Vertikální cihlový kanál čtvercového průřezu o stranách 545 mm a 700 mm (dle obrázku), slouží k dopravě koksárenského plynu do pece. Průměrná teplota plynu po celé délce kanálu je 550 °C, $\rho_0 = 1,31 \text{ kg.m}^{-3}$. Rychlost plynu na vstupu do kanálu (vztažená na normální podmínky) je $v_0 = 4,2 \text{ m.s}^{-1}$. V prvním úseku kanálu je vloženo koleno s ostrým zaoblením a dále škrticí klapka, která je natočena proti ose potrubí o 30 °. Určete celkové tlakové ztráty v odtahovém kanále. Teplota okolního vzduchu je 20 °C, hustota vzduchu je $1,239 \text{ kg.m}^{-3}$.

Řešení:

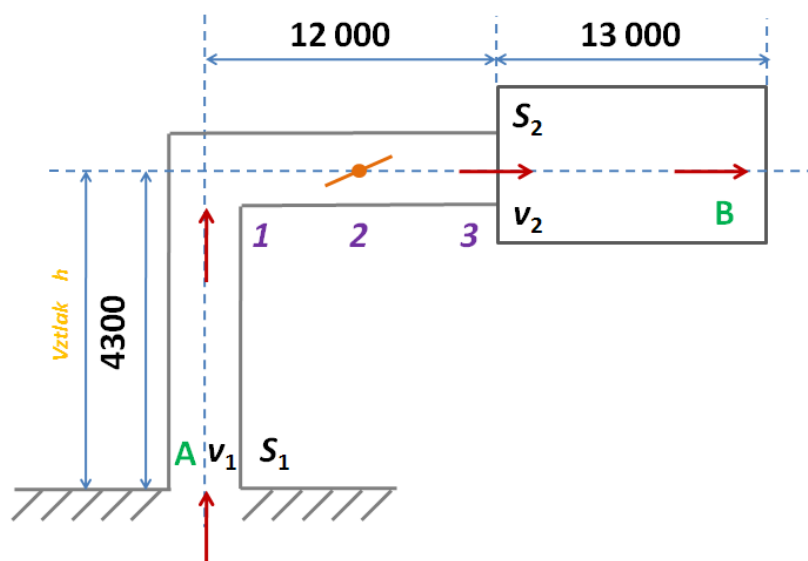
Z matematického hlediska budeme určovat hydraulické (tlakové) ztráty třením, místní ztráty a ztráty vztlakem v daném kanále, kterým proudí koksárenský plyn

$$p_{z,treni} = \Lambda \cdot \frac{l}{d_h} \cdot \frac{v_t^2 \cdot \rho_t}{2} \quad (\text{Pa})$$

$$p_{z,mistni} = \xi \cdot \frac{v_t^2 \cdot \rho_t}{2} \quad (\text{Pa})$$

$$p_{z,vztlak} = h \cdot g \cdot (\rho_{okoli} - \rho_{plyn}) \quad (\text{Pa}).$$

Obrázek kanálu si rozdělíme na všechny tlakové ztráty podle obrázku:



Třecí ztráty: úsek **A** a **B**. Délka úseku A je 16 300 mm, úsek B = 13 000 mm. Třecí ztráty budou dvě, na obou úsecích.

Místní ztráty: změna geometrie v místech **1**, **2** a **3**. 1 – koleno s ostrým zaoblením 90°, 2 – škrticí klapka v pravouhlém potrubí a 3 – vtok s náhlým rozšířením průřezu. Místní ztráty jsou celkem tři.

Ztráta vztlakem je na výšce **h**. Ztráta vztlakem je jen jedna.

Výpočet:

a) určení kinematické viskozity pro koksárenský plyn je z obr. **RES03**.

Kinematická viskozita pro 550 °C je $\nu = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

b) určení hustoty koksárenského plynu při teplotě 550 °C.

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{1 + \alpha \cdot t} = \frac{1,31}{1 + \frac{550}{273,15}} = 0,435 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$$

c) určení rychlosti koksárenského plynu při teplotě 550 °C pro úsek A

$$v_{t,A} = v_{0,A} (1 + \alpha \cdot t) = 4,2 \left(1 + \frac{550}{273,15} \right) = 12,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

d) určení hydraulického průřezu d_h pro první úsek A

$$d_{h,A} = \frac{4S}{o} = \frac{4 \cdot (a \cdot a)}{2 \cdot (a + a)} = \frac{4 \cdot 0,545 \cdot 0,545}{2 \cdot (0,545 + 0,545)} = 0,545 \text{ m}.$$

e) určení součinitele třecí ztráty Λ_A . Určíme Reynoldsovo kritérium Re pro úsek A

$$Re_A = \frac{v_{t,A} \cdot d_{h,A}}{\nu_{550}} = \frac{12,66 \cdot 0,545}{1,7 \cdot 10^{-4}} = 40\,586,47$$

Pro cihlový kanál platí následující vztah pro určení součinitele

$$\Lambda_A = \frac{A}{Re^n} = \frac{0,175}{40586,47^{0,12}} = 0,049$$

f) určení tlakové ztráty třecí v úseku A:

$$p_{z,treni,A} = \Lambda_A \cdot \frac{l}{d_{h,A}} \cdot \frac{v_{t,A}^2 \cdot \rho_{t,A}}{2} = 0,049 \cdot \frac{16,3}{0,545} \cdot \frac{12,66^2 \cdot 0,435}{2} = 51,09 \text{ Pa}$$

g) třecí ztráta v úseku B, analogický výpočet.

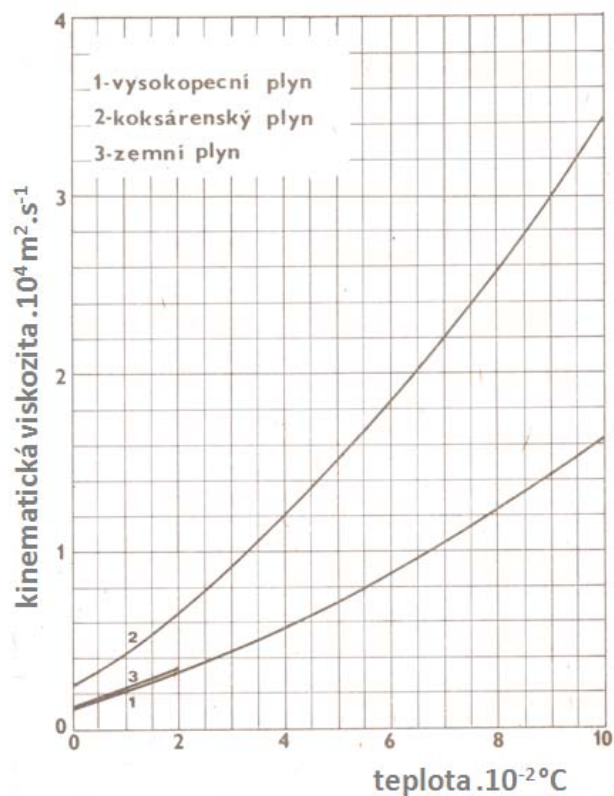
$$d_{h,B} = \frac{4S}{o} = \frac{4 \cdot (a \cdot a)}{2 \cdot (a + a)} = \frac{4 \cdot 0,7 \cdot 0,7}{2 \cdot (0,7 + 0,7)} = 0,7 \text{ m.}$$

Rychlost v úseku B určíme ze znalosti rovnice kontinuity

$$v_{0,A} \cdot S_1 = v_{0,B} \cdot S_2 \quad \Rightarrow \quad v_{0,B} = \frac{v_{0,A} \cdot S_1}{S_2} = \frac{4,2 \cdot 0,545^2}{0,7^2} = 2,546 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Přepočte rychlosti na teplotu 550 °C je

$$v_{t,B} = v_{0,B} (1 + \alpha \cdot t) = 2,546 \left(1 + \frac{550}{273,15} \right) = 7,672 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



Obr. RES03. Kinematická viskozita topných plynů.

Reynoldsovo kritérium $Re_B = \frac{v_{t,B} \cdot d_{h,B}}{\nu_{550}} = \frac{7,672 \cdot 0,7}{1,7 \cdot 10^{-4}} = 31\,590,5$

Součinitel třecí ztráty v úseku B je $\Lambda_B = \frac{A}{Re^n} = \frac{0,175}{31\,590,5^{0,12}} = 0,050$

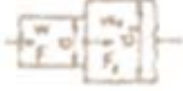
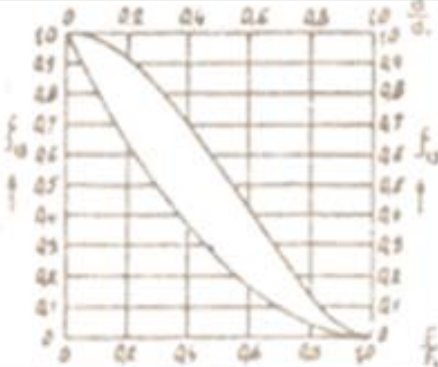
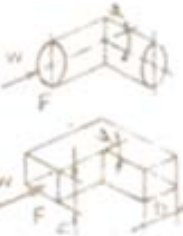
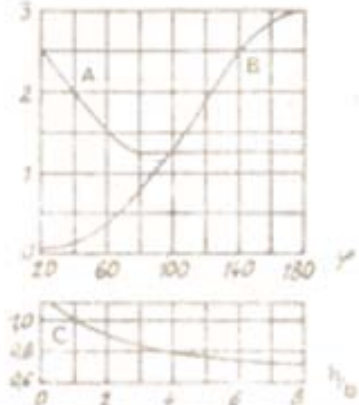

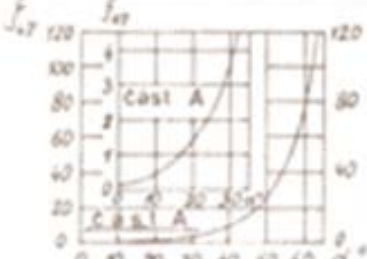
Určení tlakové ztráty v úseku B

$$p_{z,treni} = \Lambda_B \cdot \frac{l}{d_{h,B}} \cdot \frac{v_{t,B}^2 \cdot \rho_{t,B}}{2} = 0,050 \cdot \frac{13}{0,7} \cdot \frac{7,672^2 \cdot 0,435}{2} = 11,89 \text{ Pa}$$

Celkové ztráty třením jsou

$$p_{z,treci} = p_{z,treci,A} + p_{z,treci,B} = 51,09 + 11,89 = 62,98 \text{ Pa.}$$

h) určení místních ztrát. K tomuto výpočtu použijeme příložené tabulky na obr. **RES04**. Jsou zde grafy pro určení součinitele místní ztráty pro případy 1 (č. 17), 2 (č. 47), 3 (č. 13).

13	<p>vtok s náhlým rozšířením</p> 		<p>W</p> $\xi_3 = \left(1 - \frac{F}{F_1}\right)^2$ $\xi_3 = \left[1 - \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2\right]^2$
17	<p>koleno s ostrým zaoblením</p> 		<p>W; při $Re \geq 4 \cdot 10^3$ stěny hladké, $\epsilon = 0$ pro kruhový a čtvercový průřez $C = 1$</p> $\xi_1 = A \cdot B \cdot C$
47	<p>škrtková klapka v pravouhlém potrubí</p> 		<p>W</p>

Obr. RES04. Případy pro určení součinitele místní ztráty.

Součinitel místní ztráty pro koleno 90° s ostrým zaoblením $\xi_1 = A \cdot B \cdot C = 1,25 \cdot 1 \cdot 1 = 1,25$

Součinitel místní ztráty pro klapku $\xi_{17} = 3$

Součinitel místní ztráty pro vtok s náhlým rozšířením $\xi_3 = \left(1 - \frac{0,545^2}{0,7^2}\right)^2 = 0,155$

$$p_{z,místní,1} = \xi_1 \cdot \frac{v_{1,A}^2 \cdot \rho_l}{2} = 1,25 \cdot \frac{12,66^2 \cdot 0,435}{2} = 43,57 \text{ Pa}$$

$$p_{z,místní,2} = \xi_2 \cdot \frac{v_{1,A}^2 \cdot \rho_l}{2} = 3 \cdot \frac{12,66^2 \cdot 0,435}{2} = 104,58 \text{ Pa}$$

$$p_{z, \text{ místní}, 3} = \xi_3 \cdot \frac{v_{t,A}^2 \cdot \rho_t}{2} = 0,155 \cdot \frac{12,66^2 \cdot 0,435}{2} = 5,40 \text{ Pa}$$

Celkové místní ztráty $p_{z, \text{ místní}} = 43,57 + 104,58 + 5,40 = 153,55 \text{ Pa}$.

i) určení vztlakové ztráty na výšce h . Vztlak působí stejným směrem jako je směr proudění koksárenského plynu, proto bude napomáhat proudění. Ztrátu vztlakem určíme

$$p_{z, \text{ vztlak}} = h \cdot g \cdot (\rho_{\text{okoli}} - \rho_{\text{plyn}}) = 4,3 \cdot 9,81 \cdot \left(\frac{1,239}{1 + \frac{20}{273,15}} - \frac{1,31}{1 + \frac{550}{273,15}} \right) = 30,37 \text{ Pa}$$

j) Celková ztráta tlakem celého potrubí je

$$p_z = p_{z, \text{ treci}} + p_{z, \text{ místní}} - p_{z, \text{ vztlak}} = 62,98 + 153,55 - 30,37 = 186,16 \text{ Pa}$$

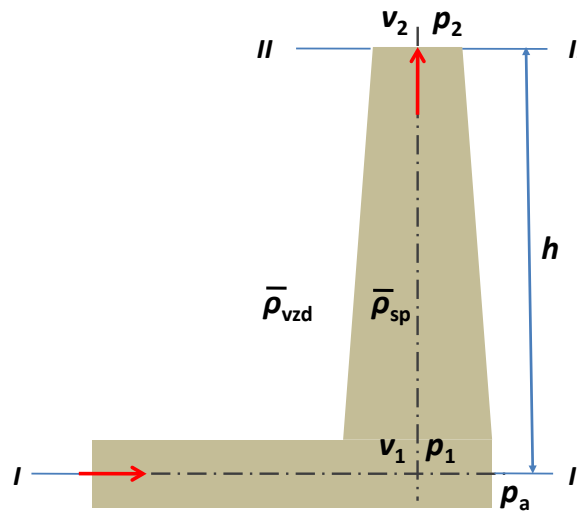
Odpověď: Celkové ztráty tlakem daného potrubí, ve kterém proudí koksárenský plyn o teplotě 550 °C jsou rovny hodnotě 186,16 Pa.



Řešený příklad 3.3

Zadání:

Určete výšku komína odvádějícího spaliny zemního plynu, jejichž teplota u paty komína je $t_{\text{sp},1} = 450 \text{ °C}$. Komín je válcového tvaru o průměru $d = 11 \text{ m}$. Hustota a rychlost spalin za normálních podmínek jsou $\rho_{0, \text{ sp}} = 1,24 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $v_{0, \text{ sp}} = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Hustota okolního vzduchu za normálních podmínek je $\rho_{0, \text{ vzd}} = 1,22 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Střední teplota okolní atmosféry $t_{\text{vzd}} = 20 \text{ °C}$. Součinitel prostupu tepla stěnou komínového průduchu $k = 2,3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, součinitel tření v komínovém průduchu $\Lambda = 0,048$. Celkové tlakové ztráty spalinového traktu jsou $p_z = 265 \text{ Pa}$.

**Řešení:**

1. Předepsaný tah. Hydraulické odpory (ztráty) se navýší o 20 % z důvodu možného budoucího zvýšení výkonu tepelného agregátu (např. pece) nebo na případné zvýšení tlakových ztrát.

$$\Delta p = 1,2 \cdot 265 = 318 \text{ Pa}$$

2. Určení předběžné výšky komína h

$$h = \frac{\Delta p}{5} = 63,6 \text{ m}$$

3. Vnitřní obvod komínového průduchu O .

$$O = \pi \cdot \bar{d} = \pi \cdot 11 = 34,54 \text{ m}$$

4. Součinitel chladnutí komínu K

$$K = \frac{h \cdot k \cdot O}{Q_{m,sp} \cdot c_{p,sp}} = \frac{63,6 \cdot 2,3 \cdot 34,54}{294,603 \cdot 1438,6} = 0,0119$$

$$Q_{m,sp} = S \cdot \rho_{0,sp} \cdot v_0 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot \rho_{0,sp} \cdot v_0 = \frac{\pi \cdot 11^2}{4} \cdot 1,24 \cdot 2,5 = 294,303 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

5. Střední teplota spalin v komínovém průduchu

$$\bar{t}_{sp} = \bar{t}_{vzd} + \frac{t_{sp,1} - \bar{t}_{vzd}}{K} \cdot (1 - e^{-K}) = 20 + \frac{450 - 20}{0,0119} \cdot (1 - e^{-0,0119}) = 447,452 \text{ } ^\circ\text{C}$$

6. Střední průřezová plocha komínového průduchu

$$S = \frac{\pi \cdot \bar{d}^2}{4} = \frac{\pi \cdot 11^2}{4} = 94,985 \text{ m}^2$$

7. Střední rychlost proudění spalin

$$\bar{v}_{\text{sp}} = v_{0,\text{sp}} \cdot \left(1 + \alpha \cdot \bar{t}_{\text{sp}}\right) = 2,5 \cdot \left(1 + \frac{447,452}{273,15}\right) = 6,595 \text{ m.s}^{-1}$$

8. Teplota spalin v ústí komínového průduchu

$$t_{\text{sp},2} = \bar{t}_{\text{vzd}} + (t_{\text{sp},1} - \bar{t}_{\text{vzd}}) \cdot e^{-K} = 20 + (450 - 20) \cdot e^{-0,0119} = 444,913 \text{ }^\circ\text{C}$$

9. Teplota na vnitřním povrchu ústí komínového průduchu

$$t_{i,2} = t_{\text{sp},2} - \frac{k}{\alpha_2} \cdot (t_{\text{sp},1} - \bar{t}_{\text{vzd}}) = 444,913 - \frac{2,3}{32,193} \cdot (450 - 20) = 414,192 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\alpha_2 = 2,326 + 11,63 \sqrt{\bar{v}_{\text{sp}}} = 2,326 + 11,63 \sqrt{6,595} = 32,193 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

10. Výška komína.

$$h = \frac{\Delta p - \frac{v_{0,1}^2 \cdot \rho_{0,\text{sp}}}{2} \cdot (1 + \alpha \cdot t_{\text{sp},1}) + 2 \cdot \frac{v_{0,2}^2 \cdot \rho_{0,\text{sp}}}{2} \cdot (1 + \alpha \cdot t_{\text{sp},2})}{g \cdot \left(\frac{\rho_{0,\text{vzd}}}{(1 + \alpha \cdot \bar{t}_{\text{vzd}})} - \frac{\rho_{0,\text{sp}}}{(1 + \alpha \cdot \bar{t}_{\text{sp}})} \right) - \frac{\Lambda}{\bar{d}} \cdot \frac{\bar{v}_0^2 \cdot \rho_{0,\text{sp}}}{2} \cdot (1 + \alpha \cdot \bar{t}_{\text{sp}})}$$

$$= \frac{318 - \frac{2,5^2 \cdot 1,24}{2} \cdot \left(1 + \frac{450}{273,15}\right) + 2 \cdot \frac{2,5^2 \cdot 1,24}{2} \cdot \left(1 + \frac{444,913}{273,15}\right)}{9,81 \cdot \left(\frac{1,22}{\left(1 + \frac{20}{273,15}\right)} - \frac{1,24}{\left(1 + \frac{447,452}{273,15}\right)} \right) - \frac{0,048}{11} \cdot \frac{2,5^2 \cdot 1,24}{2} \cdot \left(1 + \frac{447,452}{273,15}\right)} = 50,36 \text{ m}$$

11. Kontrolní přepočet

$$h = \frac{1}{5} \cdot \Delta p \quad \Rightarrow \quad \Delta p = 5 \cdot h = 5 \cdot 50,357 = 251,785 \text{ Pa}$$

Navýšení tlakových ztrát na 318 Pa je dostatečné. Skutečné tlakové ztráty jsou 251,785 Pa .

Odpověď: Výška komína byla určena 50,36 m.



Řešený příklad 3.4

Zadání:

Při přetlaku 2,6 kPa vytéká čtvercovým otvorem o straně 0,27 m v tenké pecní stěně plyn o hustotě $\rho_{0,pl} = 1,24 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Stanovte výtakovou rychlost, objemový a hmotnostní tok plynu o teplotě 500 °C. Výtokový součinitel je $\mu = 0,62$, rychlostní součinitel je $\varphi = 0,98$.

Řešení:

Z matematického hlediska se jedná o výtok plynu otvorem při nízkých rychlostech. Pro takové případy platí, že tlakový rozdíl plynu před a za otvorem $\Delta p \leq 5 \text{ kPa}$.

Výpočet výtokové rychlosti v_2

$$v_2 = \varphi \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho_{pl}}} = 0,98 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 2600}{0,438}} = 106,78 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\rho_{pl} = \frac{\rho_0}{1 + \alpha \cdot t} = \frac{1,24}{1 + \frac{500}{273,15}} = 0,438 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Výpočet objemového toku:

$$\begin{aligned} Q_v &= S_2 \cdot v_2 = \varepsilon \cdot \mu \cdot S_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho_{pl}}} = \mu \cdot S_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho_{pl}}} \cdot \frac{S_2}{S_0} = \mu \cdot S_2 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p}{\rho_{pl}}} = \\ &= 0,62 \cdot 0,27^2 \sqrt{\frac{2 \cdot 2600}{0,438}} = 4,925 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Výpočet hmotnostního toku:

$$Q_m = Q_v \cdot \rho_{pl} = 4,925 \cdot 0,438 = 2,157 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

Odpověď: Při výtoku plynu z otvoru v pecní stěně je rychlost $106,78 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, objemový tok $4,925 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ a hmotnostní tok $2,157 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.



Řešený příklad 3.5

Zadání:

Jednoduchou tryskou o výstupním průměru $d_2 = 0,027$ mm vytéká kyslík. Fyzikální veličiny kyslíku jsou: přetlak na vstupu do trysky 635 kPa, teplota $t = 59$ °C, měrná plynová konstanta $r = 259,82$ J.kg⁻¹.K⁻¹.

Hodnota $\kappa = 1,4$, rychlostní součinitel $\varphi = 0,95$, výtokový součinitel $\mu = 0,92$. Tlak okolí atmosféry $p_a = 101$ kPa. Určete na výstupu z trysky rychlost v_2 , teplotu t_2 , hustotu ρ_2 a hmotnostní tok kyslíku.

Řešení:

Jedná se o výtok plynu jednoduchou tryskou.

Absolutní tlak na vstupu do trysky

$$p_{\text{abs}} = p_1 = p_a + \Delta p = 101\,000 + 635\,000 = 736\,000 \text{ Pa}$$

Kritický tlak

$$p_{\text{kr}} = p_1 \cdot \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = 763\,000 \cdot \left(\frac{2}{1,4 + 1} \right)^{1,4} = 388\,815,4 \text{ Pa}$$

Protože $p_{\text{kr}} > p_a$, budou mít výstupní veličiny pro kyslík kritické hodnoty.

Výstupní rychlost

$$v_{\text{kr}} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} \cdot r \cdot T_1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4}{1,4 + 1} \cdot 259,82 \cdot 332,15} = 317,3 \text{ m.s}^{-1}$$

Skutečná rychlost

$$v_{2,\text{skut}} = \varphi \cdot v_{\text{kr}} = 0,95 \cdot 317,3 = 304,44 \text{ m.s}^{-1}$$

Teplota na výstupu z trysky

$$T_{\text{kr}} = \frac{p_{\text{kr}}}{\rho_{\text{kr}} \cdot r} = T_1 \cdot \frac{2}{\kappa + 1} = 332,15 \cdot \frac{2}{1,4 + 1} = 276,79 \text{ K}$$

Hustota kyslíku při vstupu do trysky se určí podle stavové rovnice ideálního plynu

$$\rho_1 = \frac{p_1}{T_1 \cdot r} = \frac{736\,000}{332,15 \cdot 259,82} = 8,53 \text{ kg.m}^{-3}$$

Kritická hustota na výstupu z trysky

$$\rho_{kr} = \rho_1 \cdot \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa + 1}} = 8,53 \cdot \left(\frac{2}{1,4 + 1} \right)^{\frac{1,4}{1,4 + 1}} = 5,4 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Průřez trysky na výstupu

$$S_2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 0,027^2}{4} = 5,23 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Hmotnostní tok

$$Q_{m,kr} = S_2 \cdot \sqrt{\kappa \cdot \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}} \cdot p_1 \cdot \rho_1} = 5,23 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{1,4 \cdot \left(\frac{2}{1,4 + 1} \right)^{\frac{1,4 + 1}{1,4 - 1}} \cdot 736000 \cdot 8,53} = 0,982 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

Skutečný hmotnostní tok

$$Q_{m,skut} = \mu \cdot Q_{m,kr} = 0,92 \cdot 0,982 = 0,90 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

Odpověď: Jednoduchá tryska má tyto parametry – výstupní rychlost 301,44 m.s⁻¹, výstupní teplota 276,79 K, hustota 5,4 kg.m⁻³ a skutečný hmotnostní tok 0,30 kg.s⁻¹.



Řešený příklad 3.6

Zadání:

Navrhněte Lavalovu trysku pro vzduch, je-li tlak před tryskou 0,64 MPa, teplota 560 °C a hmotnostní tok 2,05 kg.s⁻¹. Vzduch vytéká do prostředí o tlaku 0,1 MPa.

Fyzikální veličiny vzduchu: měrná plynová konstanta $r = 287,06 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, hodnota $\kappa = 1,4$.

Řešení:

Kritická rychlost

$$v_{kr} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa + 1} \cdot r \cdot T_1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4}{1,4 + 1} \cdot 287,06 \cdot 833,15} = 528,23 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Kritická hustota vzduchu

$$\rho_1 = \frac{p_1}{T_1 \cdot r} = \frac{640\,000}{833,15 \cdot 287,06} = 2,68 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

$$\rho_{kr} = \rho_1 \cdot \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa + 1}} = 2,68 \cdot \left(\frac{2}{1,4 + 1} \right)^{\frac{1,4}{1,4 + 1}} = 1,41 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$$

Kritický průměr

$$S_{kr} = \frac{Q_m}{\rho_{kr} \cdot \mu \cdot v_{kr}} = \frac{2,05}{1,41 \cdot 0,92 \cdot 528,23} = 2,15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Kritický průměr

$$d_{kr} = \sqrt{\frac{4 \cdot S_{kr}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,15 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0,052 \text{ m}$$

Výtoková rychlost v průřezu S_3

$$v_3 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \cdot r \cdot T_1 \left[1 - \left(\frac{p_a}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right]} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4}{1,4-1} \cdot 287,06 \cdot 833,15_1 \left[1 - \left(\frac{100\,000}{640\,000} \right)^{1,4} \right]} = 830,12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Hustota ve výtokovém průřezu S_3

$$\rho_3 = \rho_1 \cdot \left(\frac{p_a}{p_1} \right)^{\frac{1}{\kappa}} = 2,68 \cdot \left(\frac{100\,000}{640\,000} \right)^{1,4} = 0,711 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Průměr d_3 vypočteme s pomocí S_3

$$S_3 = \frac{Q_m}{\rho_3 \cdot \mu \cdot v_3} = \frac{2,05}{0,711 \cdot 0,92 \cdot 830,12} = 3,775 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{4 \cdot S_3}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 3,775 \cdot 10^{-3}}{\pi}} = 0,069 \text{ m}$$

Délka difuzoru, zvolíme-li úhel rozevření $\beta = 10^\circ$

$$L = \frac{d_3 - d_{kr}}{2 \cdot \text{tg} \frac{\beta}{2}} = \frac{0,069 - 0,052}{2 \cdot \text{tg} \frac{10}{2}} = 0,097 \text{ m} = 9,7 \text{ cm}$$

Odpověď: Lavalova tryska má rozměry: $d_2 = d_{kr} = 5,2 \text{ cm}$; $d_3 = 6,9 \text{ cm}$. Délka difuzoru při rozšíření 10° je $9,7 \text{ cm}$.



Řešený příklad 3.7

Zadání:

Stanovte ztrátu tepla konvekci z 1 m délky horizontálního výměníku tepla válcového tvaru, který je ochlazován okolním vzduchem. Vnější průměr výměníku je 870 mm. Teplota povrchu 110°C a teplota okolního vzduchu je 10°C . Prandtlovo kritérium $Pr = 0,719$.

Řešení:

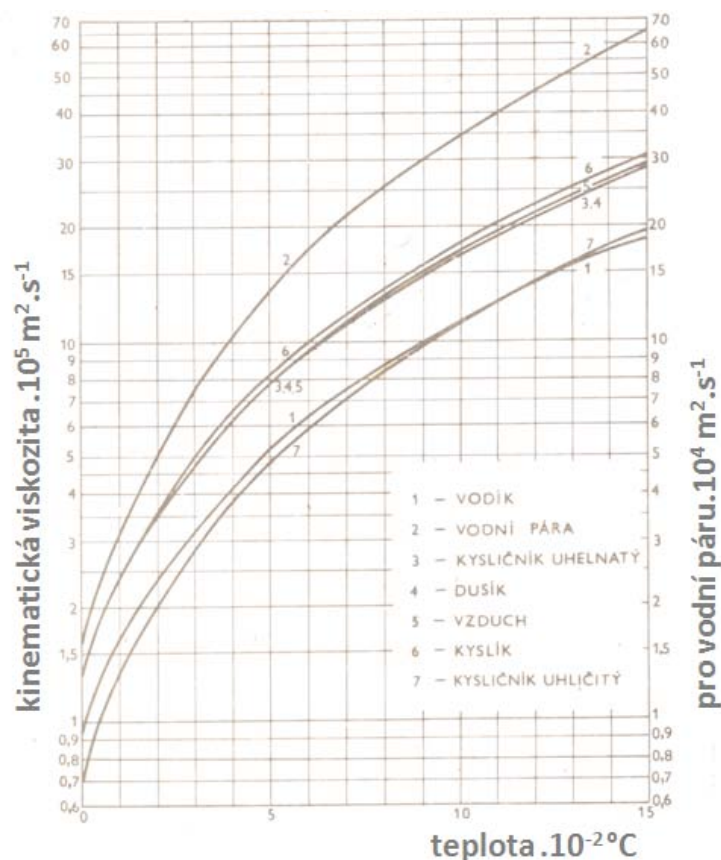
Jedná se o přirozenou konvekci. Hustotu tepelného toku (ztrátu tepla) určíme

$$q = \alpha_{\text{kon}} \cdot (t_1 - t_2) \quad (\text{W}).$$

Součinitel tepelné vodivosti α_{kon} určíme pomocí kriteriálních rovnic.

Výpočet:

- a) Určení fyzikálních parametrů vzduchu: Součinitel tepelné vodivosti a kinematickou viskozitu vzduchu určíme z následujících tabulek. Obr. RES05 a obr. RES06.



Obr. RES05. Kinematická viskozita plyných látek

Obě hodnoty fyzikálních veličin určíme pro průměrnou teplotu

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{110 + 10}{2} = 60 \text{ °C}$$

Odečtené hodnoty $\lambda_{\text{vzd}} = 27,99 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$$v_{\text{vzd}} = 18,97 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

b) určení součinitele přestupu tepla konvekcí

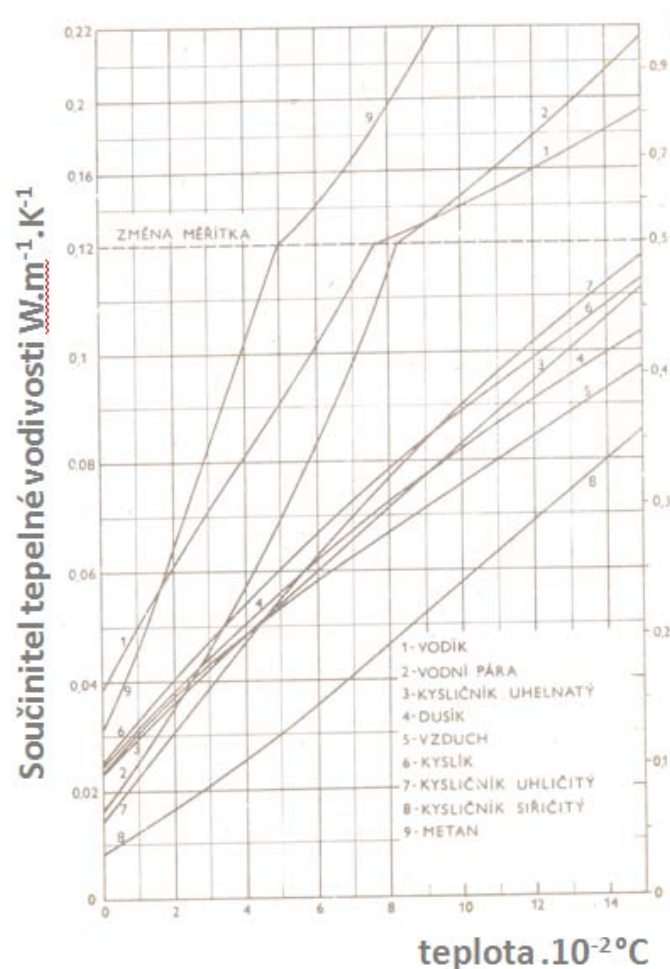
$$Gr = \frac{\gamma \cdot g \cdot d^3 \cdot \Delta t}{\nu^2} = \frac{0,003002 \cdot 9,81 \cdot 0,87^3 \cdot (110 - 10)}{(18,97 \cdot 10^{-6})^2} = 5,405 \cdot 10^9$$

Pro přirozenou konvekcí je směrodatný součin Grashoffova a Prandtlova kritéria, tedy

$$Gr \cdot Pr = 5,405 \cdot 10^9 \cdot 0,719 = 3,8865 \cdot 10^9$$

Na základě výsledného součinu $Gr \cdot Pr$ určíme příslušnou kritériální rovnici

$$Nu = 0,135 \cdot (Gr \cdot Pr)^{0,333} = 212,157$$



Obr. RES06. Součinitel tepelné vodivosti plyných látek.

Součinitel přestupu tepla konvekcí odvodíme z Nusseltova kritéria

$$\alpha_{\text{kon}} = \frac{Nu \cdot \lambda}{d} = \frac{212,157 \cdot 27,99 \cdot 10^{-3}}{0,87} = 6,826 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

c) Určení ztráty tepla P je dána rovnicí:

$$q = \alpha_{\text{kon}} \cdot (t_1 - t_2) = 6,826 \cdot (110 - 10) = 682,6 \text{ W}.$$

Odpověď: Z 1 m horizontálního výměníku tepla se ztrácí 685,6 W tepla, jestliže teplota výměníku je 110 °C a teplota okolního vzduchu je 10 °C.



Řešený příklad 3.8

Zadání:

Ve vodorovné ploché mezeře je uzavřena voda mezi dvěma plášti. Horní stěna pláště má teplotu 28 °C, spodní stěna 54 °C. Mezera má výšku 55 mm. Určete λ_{ekv} a hustotu tepelného toku q . Hodnota Prandtlova kritéria pro vodu při 40 °C $Pr = 4,351$; pro 50 °C $Pr = 3,583$.

Řešení:

Jedná se o přirozenou konvekci v omezeném prostoru. Pro výpočet použijeme kritériální rovnice platné pro daný stav. K výpočtu použijeme grafických závislostí pro součinitel tepelné vodivosti a kinematickou viskozitu vody z obrázků obr. RES07 a obr. RES08.

Výpočet:

a) určení fyzikálních parametrů vody:

Hodnoty budeme určovat pro průměrnou teplotu

$$\bar{t} = \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{54 + 28}{2} = 41 \text{ °C}$$

a využijeme následujících grafických závislostí, ze kterých určíme konkrétní číselné hodnoty.

Odečtené hodnoty z grafů:

$$\text{Pro } 40 \text{ °C} \quad \lambda_{\text{vzd}} = 0,627 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$v_{\text{vzd}} = 0,658 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\text{Pro } 50\text{ }^{\circ}\text{C} \quad \lambda_{\text{vzd}} = 0,641 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$$

$$\nu_{\text{vzd}} = 0,556 \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}.$$

Pro hodnotu $41\text{ }^{\circ}\text{C}$ dopočítáme hodnoty fyzikálních parametrů z interpolace:

$$\lambda_{41} = \frac{\lambda_{50} - \lambda_{40}}{50 - 40} + \lambda_{40} = \frac{0,641 - 0,627}{10} + 0,627 = 0,6284 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$$

$$\nu_{41} = \frac{\nu_{50} - \nu_{40}}{50 - 40} + \nu_{40} = \frac{0,556 - 0,658}{10} + 0,658 = 0,6478 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

$$Pr_{41} = \frac{Pr_{50} - Pr_{40}}{50 - 40} + Pr_{40} = \frac{3,583 - 4,351}{10} + 4,351 = 4,2742$$

$$Gr = \frac{\gamma \cdot g \cdot s^3 \cdot \Delta t}{\nu^2} = \frac{3,183 \cdot 10^{-3} \cdot 9,81 \cdot 0,055^3 \cdot (54 - 28)}{(0,6478 \cdot 10^{-6})^2} = 3,219 \cdot 10^7$$

Pro přirozenou konvekci je směrodatný součin Grashoffova a Prandtlova kritéria, tedy

$$Gr \cdot Pr = 3,219 \cdot 10^7 \cdot 4,2742 = 1,376 \cdot 10^8$$

Na základě výsledného součinu $Gr \cdot Pr$ určíme příslušnou kritériální rovnici

$$(Gr \cdot Pr) < 1000 \rightarrow \varepsilon_k = 1$$

$$(Gr \cdot Pr) > 1000 \rightarrow \varepsilon_k = 0,18(Gr \cdot Pr)^{0,25}$$

b) výpočet kritériální rovnice a určení λ_{ekv} :

tedy:

$$\varepsilon_k = 0,18(Gr \cdot Pr)^{0,25} = 0,18 \cdot (1,367 \cdot 10^8)^{0,25} = 19,495$$

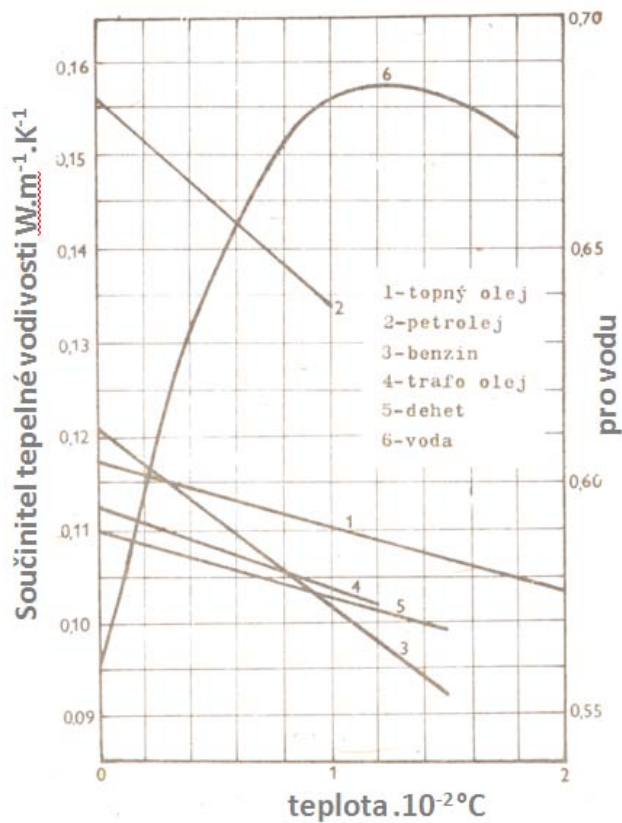
Ekvivalentní tepelná vodivost λ_{ekv} je dána součinem konvekčního faktoru ε_k a součinitele tepelné vodivosti λ , tedy

$$\lambda_{\text{ekv}} = \varepsilon_k \cdot \lambda = 19,495 \cdot 0,6284 = 12,251 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}.$$

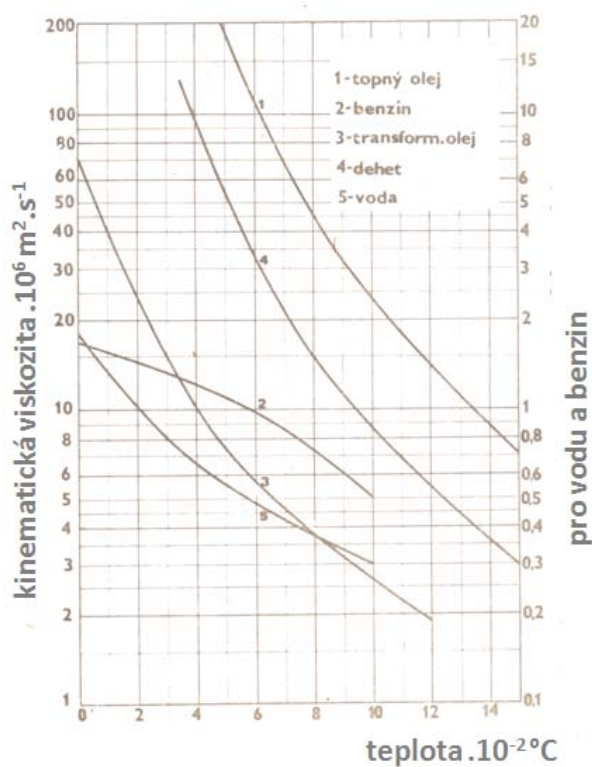
Hustota tepelného toku:

$$q = \frac{\lambda_{\text{ekv}}}{s} (t_1 - t_2) = \frac{12,251}{0,055} (54 - 28) = 5,79 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}.$$

Odpověď: ekvivalentní tepelná vodivost vody, která je uzavřena v ploché válcové mezeře je $12,251 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Hustota tepelného toku v mezeře mezi pláští je $5,79 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$.



Obr. RES07. Součinitel tepelné vodivosti pro vodu.



Obr. RES08. Kinematická viskozita pro vodu.



Řešený příklad 3.9

Zadání:

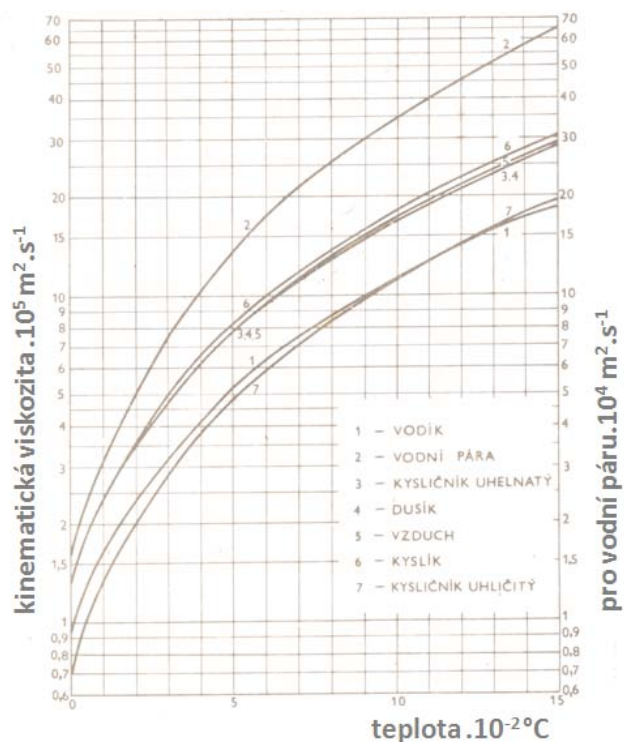
Tenká deska o délce 2 m a šířce 1,5 m je podélně oboustranně obtékána proudem vzduchu. Rychlost proudu vzduchu je $1,5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, teplota vzduchu je $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Teplota povrchu desky je $90 \text{ }^\circ\text{C}$. Stanovte součinitel přestupu tepla konvekcí po délce desky a množství tepla předaného povrchem desky proudícím vzduchem. Prandtlovo kriterium $Pr = 0,717$.

Řešení:

Jedná se o nucenou konvekci, kde vzduch proudí určitou rychlostí kolem teplé desky, se ohřívá. Pro určení součinitele přestupu konvekcí použijeme kritériální rovnici pro nucenou konvekci.

Výpočet:

a) určení fyzikálních parametrů pro vzduch. K určení použijeme následující grafy na obr. **RES09** a obr. **RES10**.

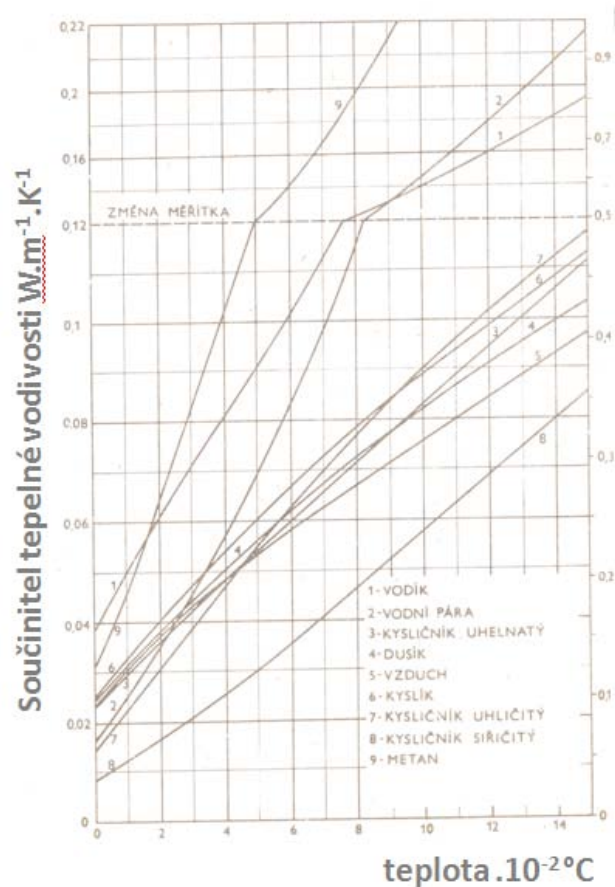


Obr. **RES09**. Kinematičká viskozita plyných látek

Určené fyzikální parametry pro vzduch při 20 °C.

Odečtené hodnoty $\lambda_{\text{vzd}} = 25,11 \cdot 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

$\nu_{\text{vzd}} = 15,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.



Obr. RES10. Součinitel tepelné vodivosti pro plynné látky

b) Výpočet Reynoldsova kritéria pro určení typu proudění. Za charakteristický rozměr použijeme délku desky.

$$Re = \frac{v \cdot l}{\nu} = \frac{1,5 \cdot 2}{15,1 \cdot 10^{-6}} = 1,987 \cdot 10^5 < 5 \cdot 10^5 \dots \text{ jedná se o laminární proudění.}$$

c) Zvolení vhodné kritériální rovnice platné pro nucenou konvekci – laminární proudění.

$$Nu = 0,67 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{0,33} = 0,67 \cdot (1,987 \cdot 10^5)^{0,5} \cdot 0,717^{0,33} = 267,6$$

d) Určení součinitele přestupu tepla konvekci pomocí Nusseltova kritéria

$$\alpha_{\text{kon}} = \frac{Nu \cdot \lambda}{l} = \frac{267,6 \cdot 25,11 \cdot 10^{-3}}{2} = 3,36 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

d) Množství předaného tepla z obou stran desky

$$P = \alpha_{\text{kon}} (t_1 - t_2) \cdot S = 2 \cdot [3,36 \cdot (90 - 20) \cdot 20 \cdot 2 \cdot 1,5] = 1411,2 \text{ W}.$$

Odpověď: Součinitel přestupu tepla konvekcí je roven $3,36 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Množství předaného tepla z desky do vzduchu z obou stran desky je $1\,411,2 \text{ W}$.



Řešený příklad 4.1

Zadání:

Určete ztrátu tepla sáláním povrchu ocelového potrubí s olejovým nátěrem. Průměr potrubí je 396 mm, délka 14 m. Teplota povrchu potrubí je pro všechny případy stejná, tedy $125 \text{ }^\circ\text{C}$. Emisivita potrubí s olejovým nátěrem je 0,9.

Potrubí je uloženo:

- ve velké místnosti s teplotou $24 \text{ }^\circ\text{C}$,
- v cihlovém kanále čtvercového průřezu ($520 \times 520 \text{ mm}$), stěny kanálu mají teplotu $24 \text{ }^\circ\text{C}$,
- v hliníkovém plášti ($520 \times 520 \text{ mm}$) a teplotě povrchu hliníkového pláště $24 \text{ }^\circ\text{C}$.

Řešení:

Z matematického hlediska je jedná o sdílení tepla zářením. Budeme určovat ztráty tepla celkem pro tři případy uložení potrubí, spočítáme si tepelné toky a porovnáme ztráty mezi případy.

Výpočet:

Určení emisivit (určeno z tabulky **TSAL02**) cihlový kanál $\varepsilon = 0,93$

hliníkový plášť (zoxidovaný) $\varepsilon = 0,19$.

Případ A. Potrubí je uloženo ve velké místnosti s teplotou $24 \text{ }^\circ\text{C}$.

Platí-li, že plocha místnosti S_2 je mnohem větší než plocha potrubí S_1 , pak taktéž platí, že emisivita $\varepsilon_n = \varepsilon_1 = 0,9$.

Množství vysálané energie:

$$P_{12} = \varepsilon_1 \cdot C_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \varphi_{12} \cdot S_1$$

$$P_{12} = 0,9 \cdot 5,67 \cdot \left[\left(\frac{125 + 273,15}{100} \right)^4 - \left(\frac{24 + 273,15}{100} \right)^4 \right] \cdot 1 \cdot \pi \cdot 0,396 \cdot 14$$

$$P_{12} = 15\,405,5 \text{ W} = 15,4 \text{ kW.}$$

Případ B. Potrubí je uloženo v cihlovém kanálu čtvercového průřezu (520x520 mm), stěny kanálu mají teplotu 24 °C. Trubka s povrchem S_1 je obklopena kanálem o povrchu S_2 . Emisivitu určíme výpočtem

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1 \right) \frac{S_1}{S_2}} = \frac{1}{\frac{1}{0,9} + \left(\frac{1}{0,93} - 1 \right) \frac{\pi \cdot 0,396 \cdot 14}{4 \cdot 0,52 \cdot 14}} = 0,865$$

Množství vysálané energie:

$$P_{12} = \varepsilon_n \cdot C_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \varphi_{12} \cdot S_1$$

$$P_{12} = 0,865 \cdot 5,67 \cdot \left[\left(\frac{125 + 273,15}{100} \right)^4 - \left(\frac{24 + 273,15}{100} \right)^4 \right] \cdot 1 \cdot \pi \cdot 0,396 \cdot 14$$

$$P_{12} = 14\,806,38 \text{ W} = 14,8 \text{ kW.}$$

Případ C. Potrubí je uloženo v hliníkovém plášti (520x520 mm) a teplotě povrchu hliníkového pláště 24 °C. Jedná se o obdobný případ. Změní se pouze emisivita materiálu. Plocha S_3 je plocha hliníkového pláště. Emisivita hliníkového pláště je 0,19.

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \left(\frac{1}{\varepsilon_3} - 1 \right) \frac{S_1}{S_3}} = \frac{1}{\frac{1}{0,9} + \left(\frac{1}{0,19} - 1 \right) \frac{\pi \cdot 0,396 \cdot 14}{4 \cdot 0,52 \cdot 14}} = 0,1843$$

Množství vysálané energie:

$$P_{12} = \varepsilon_n \cdot C_0 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \cdot \varphi_{12} \cdot S_1$$

$$P_{12} = 0,1843 \cdot 5,67 \cdot \left[\left(\frac{125 + 273,15}{100} \right)^4 - \left(\frac{24 + 273,15}{100} \right)^4 \right] \cdot 1 \cdot \pi \cdot 0,396 \cdot 14$$

$$P_{12} = 3154,7 \text{ W} = 3,1 \text{ kW.}$$

Odpověď: byl proveden výpočet ztrát tepla z povrchu potrubí, jehož teplota je ve všech případech 125 °C. Potrubí je natřeno olejovým nátěrem a je uloženo ve veliké místnosti, v cihlovém kanále a v hliníkovém plášti. Všechny tři případy se odlišují v určení emisivity a všechny tři případy mají jiné ztráty tepla do okolí. Výsledkem jsou ztráty tepla (tepelné toky):

Případ A: $P_{12} = 15,4 \text{ kW}$,

Případ B: $P_{12} = 14,8 \text{ kW}$,

Případ C: $P_{12} = 3,15 \text{ kW}$.



Řešený příklad 4.2

Zadání:

Spaliny s obsahem 10 % CO₂ a 8,5 % H₂O proudí válcovým kanálem o průměru $d = 1,5 \text{ m}$. Teplota plynu na vstupu do kanálu je $t_{pl,1} = 950 \text{ °C}$, při výstupu z kanálu je $t_{pl,2} = 850 \text{ °C}$. Teplota vnitřního povrchu kanálu na vstupu je $t_{st,1} = 625 \text{ °C}$ a při výstupu $t_{st,2} = 575 \text{ °C}$. Emisivita stěny kanálu je $\varepsilon_e = 0,88$. Stanovte měrný zářivý (tepelný) tok sáláním z plynu na povrch kanálu.

Řešení:

Z matematického hlediska se jedná o sdílení tepla zářením mezi šedým tělesem a plynem, tedy mezi kanálem a spaliny. Sálání plynů se odlišuje od sálání tuhých těles. Plyny jsou v převážné většině tříatomové sloučeniny, pro které určení emisivity je funkcí teploty a součinu parciálního tlaku plynu a efektivní délky paprsku, tedy

$$\varepsilon_{pl} = f(T_{pl}; p \cdot l_{ef}).$$

Emisivita spalin, obsahující převážně CO_2 , H_2O a SO_2 se určí z následujícího vztahu

$$\varepsilon_{\text{pl}} = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \beta \cdot \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} + \varepsilon_{\text{SO}_2},$$

kde β je korekční faktor pro vodní páru.

Množství tepla přeneseného sáláním mezi plynem a šedým tělesem

$$P = \frac{C_0}{\frac{1}{\varepsilon_{\text{stena}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{p}}^*} - 1} \cdot \left[\frac{\varepsilon_{\text{p}}}{\varepsilon_{\text{p}}^*} \cdot \left(\frac{T_{\text{pl}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{st}}}{100} \right)^4 \right] \quad (\text{W}),$$

kde $\varepsilon_{\text{stena}}$ je emisivita stěny

ε_{p}^* - emisivita plynu při teplotě stěny

ε_{p} - emisivita plynu při teplotě plynu.

Výpočet:

a) určení teplot pro výpočet: střední teplota spalin v kanále

$$\bar{t}_{\text{pl}} = \frac{t_{\text{pl},1} + t_{\text{pl},2}}{2} = \frac{950 + 850}{2} = 900 \text{ } ^\circ\text{C},$$

Střední teplota stěny kanálu

$$\bar{t}_{\text{st}} = \frac{t_{\text{st},1} + t_{\text{st},2}}{2} = \frac{625 + 575}{2} = 600 \text{ } ^\circ\text{C}$$

b) určení efektivní délky paprsku

Pro válec platí $l_{\text{ef}} = 0,9 \cdot d = 0,9 \cdot 1,5 = 1,35 \text{ m}$.

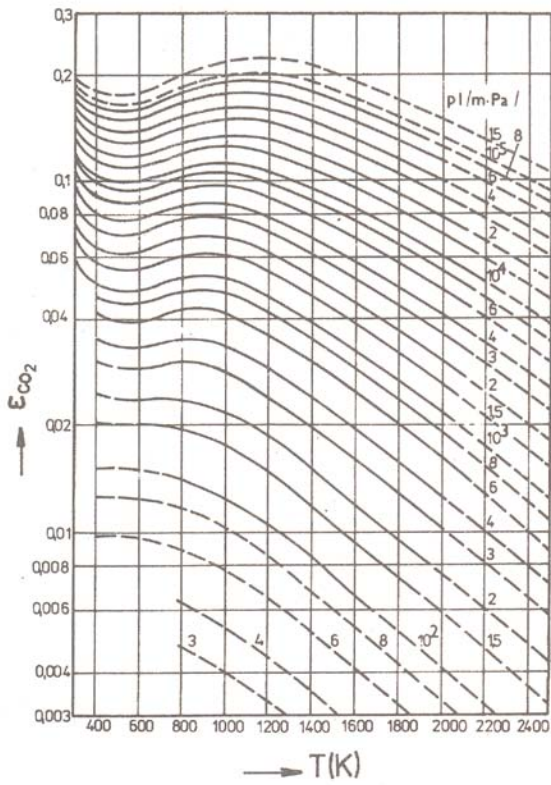
Určení parciálního tlaku pro oxid uhličitý: $p_{\text{CO}_2} = \varphi_{\text{CO}_2} \cdot 101\,325 = 10\,132,5 \text{ Pa}$

Určení parciálního tlaku pro vodní páru: $p_{\text{H}_2\text{O}} = \varphi_{\text{H}_2\text{O}} \cdot 101\,325 = 8612,63 \text{ Pa}$

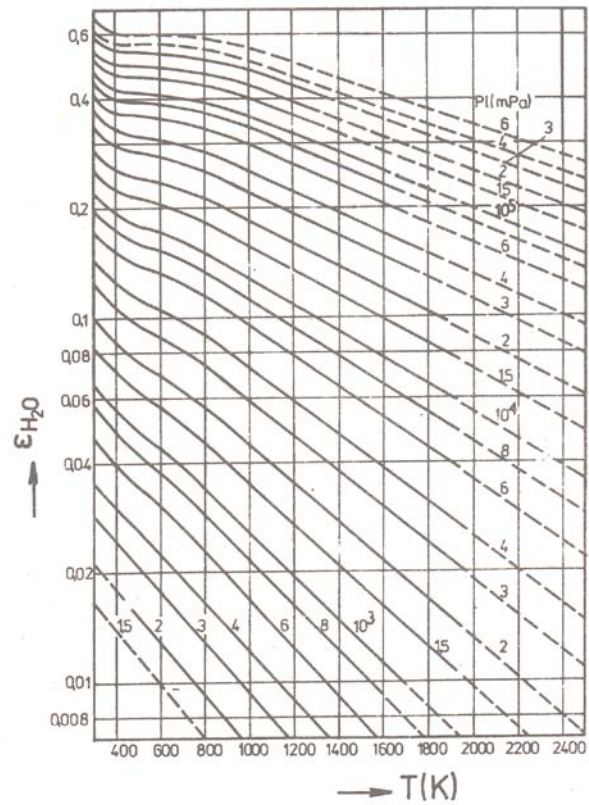
Efektivní délka paprsku pro CO_2 : $p_{\text{CO}_2} \cdot l_{\text{ef}} = 10132,5 \cdot 1,35 = 13678,875 \text{ Pa}\cdot\text{m}$

Efektivní délka paprsku pro H_2O : $p_{\text{H}_2\text{O}} \cdot l_{\text{ef}} = 8612,63 \cdot 1,35 = 11627,05 \text{ Pa}\cdot\text{m}$

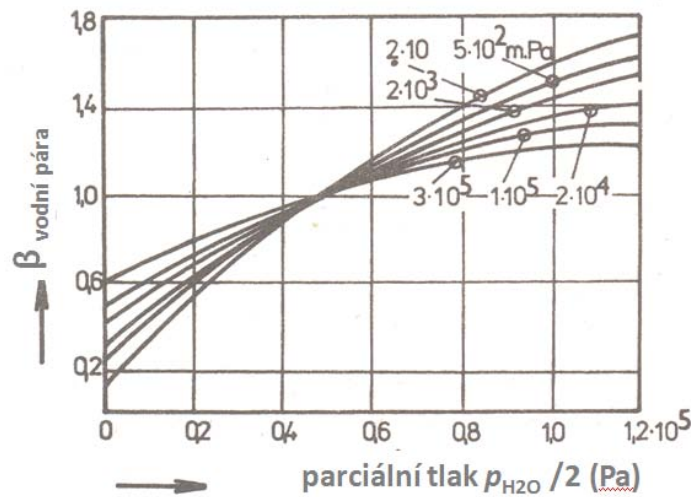
c) stanovení emisivity spalin při teplotě $900 \text{ } ^\circ\text{C}$. Ke stanovení použijeme obr. **RES11** a **RES12**, resp. **RES13**.



Obr. RES11. Nomogram pro určení integrální emisivity oxidu uhličitého.



Obr. RES12. Nomogram pro určení integrální emisivity vodní páry.



Obr. RES13. korekční faktor β pro H_2O

Hodnoty z tabulek:

$$\varepsilon_{\text{CO}_2} = 0,09 \quad \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = 0,065 \quad \beta = 1,065$$

$$\varepsilon_{\text{pl}}^{900} = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \beta \cdot \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} + \varepsilon_{\text{SO}_2} = 0,09 + 1,065 \cdot 0,065 + 0 = 0,1592$$

Hodnota $\varepsilon_{\text{SO}_2}$ je rovna nule, protože spaliny oxid siřičitý neobsahují.

d) stanovení emisivity spalin při teplotě 600 °C. Ke stanovení použijeme obr. RES11 a RES12, resp. RES13.

Hodnoty z tabulek:

$$\varepsilon_{\text{CO}_2} = 0,09 \quad \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} = 0,09 \quad \beta = 1,065$$

$$\varepsilon_{\text{pl}}^{600} = \varepsilon_{\text{CO}_2} + \beta \cdot \varepsilon_{\text{H}_2\text{O}} + \varepsilon_{\text{SO}_2} = 0,09 + 1,065 \cdot 0,09 + 0 = 0,1858$$

Hodnota $\varepsilon_{\text{SO}_2}$ je rovna nule, protože spaliny oxid siřičitý neobsahují.

e) výpočet měrného zářivého toku z plynu (spalin) do kanálu

$$P = \frac{C_0}{\frac{1}{\varepsilon_{\text{stena}}} + \frac{1}{\varepsilon_{\text{p}}^{600}} - 1} \cdot \left[\frac{\varepsilon_{\text{p}}^{900}}{\varepsilon_{\text{p}}^{600}} \cdot \left(\frac{T_{\text{pl}}}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{\text{st}}}{100} \right)^4 \right] \quad (\text{W})$$

$$P = \frac{5,67}{\frac{1}{0,88} + \frac{1}{0,1858} - 1} \cdot \left[\frac{0,1592}{0,1858} \cdot \left(\frac{900 + 273,15}{100} \right)^4 - \left(\frac{600 + 273,15}{100} \right)^4 \right]$$

$$P = 10\,703,34 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} = 10,7 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$$

Odpověď:

Měrný zářivý (tepelný tok) mezi spalinami daného složení a stěnami kanálu je 10,7 kW.m⁻²



Další zdroje

Seznam použitých informačních zdrojů a literatury, www odkazů apod. pro zájemce o **dobrovolné** rozšíření znalostí popisované problematiky.

BÁLEK, S.: Tepelně technické tabulky a diagramy. III.vydání. Ostrava. Vysoká škola báňská, 1988. 137 s.

CIARLET, P.G., LIONS, J.L. eds.: *Handbook of Numerical Analysis*. Vol 7, pp 713-1020, Marseille, 1997.

HAŠEK, P., KLEČKOVÁ, Z.: Energetika v metalurgii. Cvičení. 2. vydání. Ostrava. VŠB – Technická univerzita Ostrava. 175 s. ISBN 80-248-0016-0.

FINK, M., ŘEZNÍČEK, L.: FEM/MKP – Základy použití metody konečných prvků pro technické výpočty v programu Autodesk Inventor Professional. 1. vydání. Střední průmyslová škola Trutnov. Trutnov, 2006.

KAPOUN, K., WYSLYCH, P.: Vybrané kapitoly moderní technické fyziky. 1. vydání. Ostrava. Vysoká škola báňská v Ostravě, 1987. 202 s.

KOLAT, P.: Přenos tepla a hmoty. II.vydání. Ostrava : VŠB v Ostravě, 1990. 266 s.

KOPŘIVA, M.: Počítačová podpora technologie. Sylaby. VUT Brno, FSI. Brno 2002.

KUCHAŘ, L., DRÁPALA, J.: Tabulky vybraných vlastností kovů. 1. vydání. Ostrava. Ediční středisko VŠB Ostrava, 1979.

KUNEŠ, J.: *Modelování tepelných procesů*. 1. vydání. Praha: SNTL, 1989. 424 s. ISBN 80-03-00124-X.

PŘÍHODA, M.: Sdílení tepla a proudění. 1. vydání. Ostrava. VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2003. 200 s. ISBN 80-7078-549-7.

RÉDR, M., PŘÍHODA, M.: *Základy tepelné techniky*. 1. vydání. Praha. SNTL Praha, 1991. 680 s. ISBN 80-03-00366-0.

ŠNITA, D.: *Chemické inženýrství I*. 1. vydání. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze. Praha 2006. ISBN 80-7080-589-7.

wood.mendelu.cz/cz/section/FEM/?q=node/32

www.345.vsb.cz/jirihruby/Vmt/MK1_panel1.pdf

www.ansys.com

www.cs.wikipedia.org

www.fluent.com

www.transvalor.com

www.umt.fme.vutbr.cz/~jbursa/MKP4.doc

www.wikipedia.com