Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava

IDENTIFIKACE SYSTÉMŮ

učební text

Milan Vrožina, Zora Jančíková, Jiří David

Ostrava 2012

Recenze: prof. Ing. F. Němec, CSc.
RNDr. Miroslav Liška, CSc.

Název: IDENTIFIKACE SYSTÉMŮ
Autor: Milan Vrožina - Zora Jančíková - Jiří David
Vydání: první, 2012
Počet stran: 178
Náklad: 20

Studijní materiály pro studijní obor B3922. Automatizace a počítačová technika v průmyslu, Fakulty metalurgie a materiálového inženýrství
Jazyková korektura: nebyla provedena.

Určeno pro projekt:

Operační program Vzděláváním pro konkurenceschopnost
Název: Personalizace výuky prostřednictvím e-learningu
Číslo: CZ.1.07/2.2.00/07.0339
Realizace: VŠB – Technická univerzita Ostrava
Projekt je spolufinancován z prostředků ESF a státního rozpočtu ČR

ISBN 978-80-248-2594-6

POKYNY KE STUDIU

IDENTIFIKACE SYSTÉMŮ

Pro předmět 5. semestru oboru B3922. Automatizace a počítačová technika v průmyslu

- integrované skriptum pro distanční studium obsahující i pokyny ke studiu
- CD-ROM s doplňkovými animacemi vybraných částí kapitol
- harmonogram průběhu semestru a rozvrh prezenční části
- rozdělení studentů do skupin k jednotlivým tutorům a kontakty na tutory
- kontakt na studijní oddělení

Prerekvizity

Předmět nemá žádné prerekvizity.

Cílem předmětu

Předmět seznamuje posluchače s metodami vytváření matematického popisu systémů pro účely syntézy jejich řízení. Jsou probrány metody matematicko-fyzikální analýzy a zejména pak metody experimentální identifikace. Pozornost je věnována deterministickým způsobům identifikace i identifikaci s náhodným průběhem vstupních veličin identifikovaných systémů, dále pak metodám jednorázové i průběžné adaptivní identifikace. Závěr látky je věnován základům stochastického modelování a základním statistickým metodám identifikace systémů.

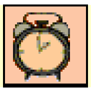
Po prostudování modulu student bude umět formulovat základní metody vytváření matematického popisu dynamických systémů pro účely simulace a syntézy jejich řízení. Student získá přehled o základních metodách matematicko-fyzikální analýzy a metodách experimentální identifikace. Student bude umět analyzovat reálné dynamické systémy a pro jejich matematický popis použít vhodné identifikační metody.

Pro koho je předmět určen

Modul je zařazen do bakalářského studia oboru B3922. Automatizace a počítačová technika v průmyslu, FMMI studijního programu 3902R040, ale může jej studovat i zájemce z kteréhokoliv jiného oboru, pokud splňuje požadované prerekvizity.

Skriptum se dělí na části, kapitoly, které odpovídají logickému dělení studované látky, ale nejsou stejně obsáhlé. Předpokládaná doba ke studiu kapitoly se může výrazně lišit, proto jsou velké kapitoly děleny dále na číslované podkapitoly a těm odpovídá níže popsaná struktura.

Při studiu každé kapitoly doporučujeme následující postup:



Čas ke studiu: xx hodin

Na úvod kapitoly je uveden **čas** potřebný k prostudování látky. Čas je orientační a může vám sloužit jako hrubé vodítko pro rozvržení studia celého předmětu či kapitoly. Někomu se čas může zdát příliš dlouhý, někomu naopak. Jsou studenti, kteří se s touto problematikou ještě nikdy nesetkali a naopak takoví, kteří již v tomto oboru mají bohaté zkušenosti.

Cíl: Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat ...
- definovat ...
- vyřešit ...

Ihned potom jsou uvedeny cíle, kterých máte dosáhnout po prostudování této kapitoly – konkrétní dovednosti, znalosti.

Výklad

Následuje vlastní výklad studované látky, zavedení nových pojmů, jejich vysvětlení, vše doprovázeno obrázky, tabulkami, řešenými příklady, odkazy na animace.

Shrnutí pojmů 1.1.

Na závěr kapitoly jsou zopakovány hlavní pojmy, které si v ní máte osvojit. Pokud některému z nich ještě nerozumíte, vraťte se k nim ještě jednou.

Otázky 1.1.

Pro ověření, že jste dobře a úplně látku kapitoly zvládli, máte k dispozici několik teoretických otázek.

Úlohy k řešení 1.1.

Protože většina teoretických pojmů tohoto předmětu má bezprostřední význam a využití v databázové praxi, jsou Vám nakonec předkládány i praktické úlohy k řešení. V nich je hlavní význam předmětu a schopnost aplikovat čerstvě nabyté znalosti při řešení reálných situací hlavním cílem předmětu.

KLÍČ K ŘEŠENÍ

Výsledky zadaných příkladů i teoretických otázek výše jsou uvedeny v závěru učebnice v Klíči k řešení. Používejte je až po vlastním vyřešení úloh, jen tak si samokontrolou ověříte, že jste obsah kapitoly skutečně úplně zvládli.

Úspěšné a příjemné studium s touto učebnicí Vám přejí autoři výukového materiálu

Milan Vrožina - Zora Jančíková - Jiří David

OBSAH

1. IDENTIFIKACE V PROCESU POZNÁNÍ

1.1. Základní pojmy

Čas ke studiu: 1 hodinu

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat pojem identifikace, apriorní a aposteriorní informace, model.
- popsat.vstup a výstup systému, operátor transformace, objekt identifikace.

Výklad

Předpokladem efektivního řízení daného objektu je znalost jeho vlastností. Je zřejmé, že má-li být řízení optimální, je nutné přesně znát vlastnosti řízeného objektu. Proto je velký zájem věnován tvorbě matematických modelů objektů řízení, protože tyto modely jsou základem pro tvorbu řídicích systémů, při výběru algoritmů řízení apod.

Matematické modely nemají základní význam jen v oblasti řízení, kybernetiky, systémového inženýrství nebo v jiných technických vědách, ale dnes již ve většině vědních disciplín, protože představují nejen vhodnou formu na vyjádření poznatků o zkoumaných objektech a jevech, ale spolu s prostředky výpočetní techniky představují velmi efektivní nástroj k jejich dalšímu a hlubšímu zkoumání.

Proces tvorby modelu nazýváme modelování, což je popis vyšetřovaných objektů z kvantitativní i z kvalitativní stránky. Při sestavování modelu se reálný objekt zjednodušuje, schematizuje a získané schéma se popisuje v závislosti na složitosti objektu pomocí určitého matematického formálního aparátu. Model musí uvažovat všechny charakteristické vlastnosti zkoumaného procesu a je nutno z něj vyloučit vlastnosti nepodstatné, které by dělaly model složitým a analýzu modelu těžkopádnou. Metody ztotožnění modelu s vyšetřovaným objektem jsou předmětem (cílem) vědní disciplíny, která se nazývá identifikace.

Identifikace je proces určování matematického popisu (modelu) reálného systému. Je to činnost, při které určujeme **strukturu** a **parametry** modelu. Strukturou rozumíme řád a zvolený typ diferenciální či diferenční rovnice (lineární, nelineární rovnice, typ nelinearity atd.) nebo soustavu těchto rovnic, spojitý nebo diskrétní přenos se zvolenými stupni polynomů v čitateli a jmenovateli, který matematicky vyjadřuje závislost výstupního signálu na signálu vstupním. Parametry pak rozumíme koeficienty těchto rovnic nebo přenosů. V případě určování struktury hovoříme o **strukturální identifikaci,** tzv. identifikaci v širším smyslu a při určování parametrů modelu o **parametrické identifikaci** neboli o odhadu parametrů, tzv. identifikaci v užším smyslu. Identifikace a modelování jsou tedy procesy, které se navzájem prolínají.

Konečným cílem identifikace a modelování je vytvořit takový model systému, definovaný na objektu, aby chování modelu bylo v jistém smyslu stejné jako u reálného systému za stejných provozních podmínek. Je třeba si uvědomit, že objekt je obklopen prostředím (okolím), přičemž objekt a okolí jsou v neustálé interakci. Když hovoříme o identifikaci, tj. ztotožnění modelu se systémem, potom apriori předpokládáme, že systém a model nejsou identické. Jedná se vždy o jistou aproximaci, která transformuje skutečnost do abstraktního světa matematiky.

V procesu identifikace a modelování hraje nemalou úlohu tvořivý intelekt zkoumající daný systém, což je možné chápat jako součást analýzy identifikovaného systému. Člověk určuje hledisko identifikace, určuje její cíl (k jakému účelu bude modelu použito, zda k simulaci nebo k řízení daného objektu), rozlišuje podstatné od nepodstatného a vytváří tak první zjednodušenou reprezentaci objektu.

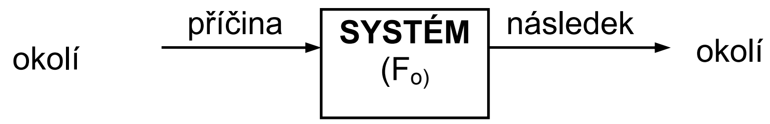
Důležitou úlohu při procesu identifikace sehrává samotná identifikace informace, která se o objektu získává na základě jeho pozorování, což se převážně děje měřením, které se kvantifikuje, uchovává a při konkretizaci modelu se známými a vhodnými prostředky a postupy zpracovává. Tuto informaci často nazýváme **aposteriorní informací** (získanou měřením), protože byla získána na základě skutečného pozorování daného konkrétního procesu, na rozdíl od **apriorní informace** (předem daná), kterou je možno charakterizovat jako existující poznatky nahromaděné lidstvem při pozorování celé třídy příbuzných tříd objektů, do kterých zkoumaný objekt (a tedy i systém) patří. Tyto poznatky jsou uspořádány v ucelený soubor a představují bohatší informaci, než je možno získat z aposteriorní informace na daném zkoumaném objektu. Tato informace přitom existuje apriori a má rozhodující význam při odhadu struktury modelu. Aposteriorní a apriorní informace představují úplnou informaci o systému. Zatímco apriorní informace má kvalitativní charakter, aposteriorní informace má spíše charakter kvantitativní.

Ztotožnění (identifikace) modelu se systémem definovaném na objektu ve své podstatě představuje kvantitativní problém, protože nejčastěji provádíme odhad parametrů modelu pro již vybranou strukturu. V tomto případě hovoříme o parametrické identifikaci, kterou řešíme použitím formálních prostředků, tj. pomocí vhodných a osvědčených algoritmů, které zpracovávají aposteriorní informaci algoritmickou formou.

Úspěšnost procesu modelování a identifikace tedy závisí na několika faktorech, které spočívají ve vhodném výběru apriorní informace, aposteriorní informace a identifikačního algoritmu, v němž je obsaženo i hodnotící kritérium pro verifikaci modelu se skutečností.

Model je zobrazením podstatných vlastností reálného (nebo konstruovaného) systému, které ve vhodné formě vyjadřuje informaci o systému. Musí vyjadřovat vztahy příčiny a následku. Příčina a následek jsou spolu prostřednictvím systému vázány **operátorem transformace F_o**.

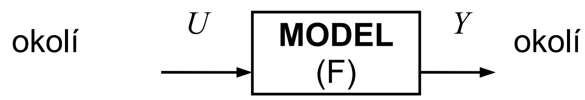
Schématicky můžeme tento vztah vyjádřit:



Obr. 1 Vztahy systému a okolí

Popis tohoto uspořádání budeme nazývat modelem. Přitom je jedno, pomocí jakého výrazového prostředku je tento popis proveden. Může být proveden matematickými rovnicemi, formou grafů, tabulek, algoritmem, ale také jen slovně.

Popis lze formalizovat:



Obr. 2 Formalizace popisu modelu systému

Na obr. 2 jsme označili:

příčinu	U	**vstup modelu**,
následek	Y	**výstup modelu**.

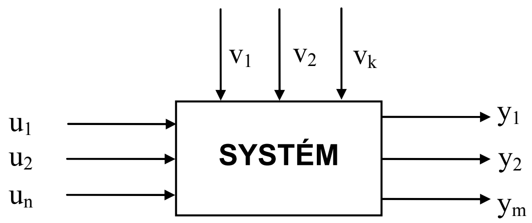
Vazbu mezi vstupem a výstupem modelu lze zapsat ve tvaru:

$$Y = F(U) \tag{1}$$

F je pravidlo, podle kterého přiřazujeme následek Y příčině U (výstup modelu jeho vstupu). Toto pravidlo F nazveme **operátorem modelu**.

Úloha identifikace spočívá v určení (syntéze) operátoru modelu F, tj. v provedení vyhodnocení měření a určení odhadu operátoru F tak, aby v určitém předem definovaném smyslu byl blízký skutečnému operátoru F_0.

Objekt identifikace pak můžeme znázornit:



Obr. 3 Objekt identifikace

Pro vektory *U, V, Y* platí:

$U = (u_1, u_2, \ldots\ldots u_n)$ ...... měřitelné vstupy

$Y = (y_1, y_2, \ldots\ldots y_m)$ ..... měřitelné výstupy

$V = (v_1, v_2, \ldots\ldots v_k)$ ..... poruchové vstupy

Model reálného systému je vždy spojen se zjednodušením a zanedbáním nepodstatných detailů reálného systému, protože reálná skutečnost může být lidským pozorovatelem vystižena jen do určité míry. Právě tato míra rozhoduje, jak přesně bude model vystihovat chování reálného objektu, ale současně určuje jeho složitost a tím i praktickou použitelnost (např. co nejpřesnější popis chování reálného systému by mohl vést k tak složitému modelu, že by pak nebyl prakticky použitelný). V této fázi tvorby modelu musíme rozlišit sledované jevy od nesledovaných, podstatné od nepodstatných. Matematický model je pak zobrazením podstatných vlastností reálného systému matematickým popisem.

Shrnutí pojmů

Identifikace, model, vstup systému a modelu, výstup systému a modelu, operátor modelu, operátor transformace, apriorní informace, aposteriorní informace, strukturální identifikace, parametrická identifikace.

Otázky

1. Definujte a vysvětlete pojem identifikace a model.
2. Jak značíme vstup a výstup systému.
3. Co nazýváme operátorem transformace a modelu.
4. Definujte a vysvětlete pojmy apriorní a aposteriorní informace.
5. Vysvětlete strukturální a parametrická identifikace.

1.2. Identifikace v procesu řízení

Čas ke studiu: 0,5 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat význam modelu a identifikaci systému v procesu řízení.

Výklad

Identifikace v této oblasti má charakter pomocného oboru. Abychom mohli nějaký objekt řídit, je nutné znát vlastnosti tohoto objektu. Na základě vytvořeného modelu řízeného objektu je pak možno navrhnout řízení, nastavit parametry řízení, případně vybrat způsob řízení v určitém předem zvoleném smyslu co nejlepší.

Model určený pro potřeby syntézy řízení nemusí nutně vyjadřovat vnitřní mechanismy dějů v soustavě. Postačí získat formální souvislost mezi vstupy a výstupy soustavy. Model vyjadřující fyzikální podstatu soustavy má však daleko širší platnost v celém oboru provozních stavů a v případě, že jsme schopni tyto vnitřní děje v modelu respektovat, činíme tak. Tvorba takovéhoto modelu je však daleko obtížnější a klade vysoké nároky na řešitele, neboť se vyžaduje hluboká znalost technologické podstaty problému.

K zabezpečení řízení je třeba na základě měřených veličin vstupu a výstupu řízené soustavy mít znalost o stavu řízené soustavy, definovat cíl řízení a vytvořit algoritmus řízení. K zabezpečení těchto úkonů je třeba ve většině případů znát model soustavy (pouze u těch nejednodušších případů jej není nutno znát). Stále častěji se u složitějších systémů řízení stává model soustavy přímo součástí řídicích obvodů (je zahrnut v algoritmech řízení). Model soustavy zde slouží:

- k návrhu nejvhodnějšího způsobu řízení,
- k nastavení parametrů řízení,
- k získávání údajů o stavu řízení soustavy, které nelze přímo určit měřením,
- při změně parametrů soustavy s časem je možno opakovanou identifikací provádět opravu nastavení parametrů regulátoru.

Shrnutí pojmů

Význam modelu a identifikace systému v procesu řízení.

Otázky

1. Stanovte význam modelu pro identifikaci a řízení systému.
2. Jaká je pozice identifikace při řízení systémů.

1.3. Klasifikace modelů

Čas ke studiu: 2.5 hodiny

Cíl

Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat klasifikaci modelů, deterministický a stochastický model a rozdíly mezi nimi.
- klasifikovat modely dle různých hledisek.
- popsat jednotlivé druhy modelů

Výklad

Existují různá hlediska klasifikace modelů respektující specifické stránky odrazu reálné skutečnosti. Jedná se o informaci, kterou máme ještě před vytvářením platných zkušeností pozorováním a měřením (apriorní informace). Modely reálných soustav můžeme klasifikovat podle různých hledisek.

Podle stupně abstrakce reálného objektu:

- **fyzikální model** - je vytvořen na základě fyzikální podobnosti modelu a díla. Je tvořen přirozeným nebo umělým hmotným systémem.
- **fyzikálně matematický model (fyzikální analog) -** je model vytvořený na základě matematické a fyzikální podobnosti. Původní fyzikální proces se nahrazuje procesem analogickým majícím

stejný matematický popis (elektroanalogy, hydroanalogy).

- **matematický model** - je vytvořen na základě matematické podobnosti modelu a díla:

  - vnitřní podobnost (matematický analog, model bílé skříňky) - matematický model vytvořený fyzikálně matematickými metodami identifikace, vyjadřuje vnitřní chování systému

  - vnější podobnost (model černé skříňky) - matematický model vytvořený experimentálními metodami identifikace, vyjadřuje vnější chování systému.

Podle toho, zda model popisuje statické či dynamické vlastnosti systémů:

- **statický model -** vyjadřuje závislost výstupních veličin na vstupních veličinách v ustáleném stavu systému. Vazbu mezi vstupními a výstupními veličinami reprezentují algebraické rovnice, ve kterých nevystupuje čas jako nezávisle proměnná, takže jde o relaci mezi ustálenými hodnotami vstupů a výstupů. Umožňuje dopředu předvídat, jaké budou výstupy při daných vstupech v ustáleném stavu, neříká ale nic o tom, za jak dlouho výstupu dosáhneme. Nelze jej použít pro řízení.

- **dynamický model -** úplný model, který popisuje nejen statické, ale také dynamické vlastnosti systému. Říká nám, jaký bude průběh výstupu v čase při daném vstupu a stavu systému. Vazbu mezi vstupy a výstupy vyjadřují diferenciální, resp. diferenční rovnice. Používá se v oblasti řízení, kde jsou významnými jevy přechody od jednoho stavu ke druhému. Statický model získáme z modelu dynamického pro limitu $t \rightarrow \infty$.

Podle toho, zda parametry dynamických modelů (např. diferenciálních rovnic) jsou závislé na čase:

- **stacionární - časově nezávislé (časově invariantní) -** parametry dynamických modelů jsou konstantní.

- **nestacionární - časově závislé (časově variantní) -** parametry dynamických modelů jsou závislé na čase.

Podle způsobu identifikace:

- **analytický model -** model získaný analytickými metodami identifikace, vychází z hmotových a energetických bilancí rovnic fyzikálních, chemických, příp. biologických procesů. Při jeho tvorbě se uplatňuje deduktivní přístup.

- **experimentální model -** model získaný experimentálními metodami identifikace, měřením na skutečných objektech. Při jeho tvorbě se uplatňuje přístup induktivní.

Podle charakteru procesu, který probíhá na vyšetřovaném objektu, můžeme experimentální modely rozdělit na:

- **deterministický model -** odpovídá deterministickým (jednoznačně určeným) vztahům mezi vstupními a výstupními veličinami, tzn. že jednoznačně a přesně dovedeme tyto vztahy přiřadit a popsat.

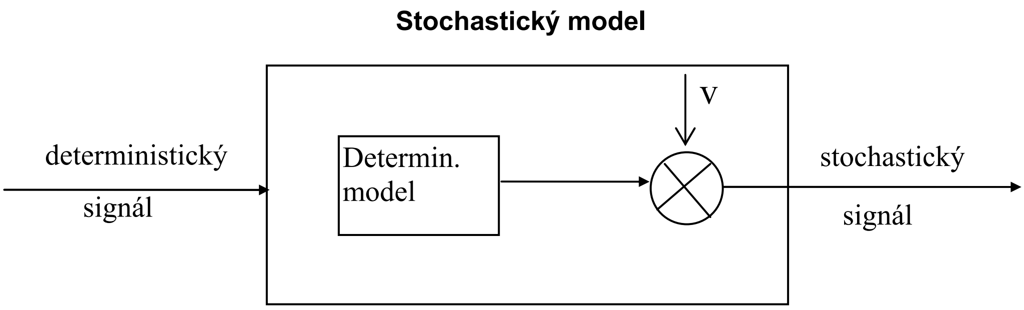
Deterministický model je možno získat, přivedeme-li na vstup vyšetřovaného objektu přesně definované (časově determinované) testovací signály. Tyto modely používáme při identifikaci objektů, na které nepůsobí žádné poruchové veličiny (resp. jejich vliv lze zanedbat). Na jejich dynamické chování lze usuzovat z minulé historie průběhu vstupních a výstupních veličin.

Obr. 4 Deterministický model

- **stochastický model -** buď sám zkoumaný systém, nebo metoda řešení mají náhodný charakter, tzn. že vztahy (korelace) mezi vstupními a výstupními veličinami nejsou zcela určité, jsou dány statisticky s určitou pravděpodobností.

Převážná většina objektů, se kterými se v průmyslové praxi setkáváme, má stochastický charakter. Pozorovaný výstup soustavy není zpravidla určován jen vstupními signály a jejich minulou historií, ale projevují se na něm náhodné vlivy, jejichž zdroj často ani neznáme. Mohou to být náhodné děje, které probíhají uvnitř vlastního objektu, nebo těžko kontrolované a určitelné náhodné vlivy působícího vnějšího okolí. Z hlediska vnějšího okolí lze proces probíhající ve stochastickém objektu chápat jako náhodnou transformaci signálů, která každému možnému vstupu přiřadí nějaký výstup, a přitom stejným vstupům může obecně přiřadit různé výstupy. Při matematickém popisu takovéto náhodné transformace nevystačíme s klasickými deterministickými modely, ale je třeba aplikovat obecnější pravděpodobnostní přístup - sestavit stochastický model.

Obecně jsou vstupní, výstupní i poruchové funkce náhodnými funkcemi času. Podobně hovoříme o stochastickém modelu tehdy, jsou-li vstupy determinované funkce času a výstupy jsou náhodné funkce času (obr. 5). Na tento stochastický model lze pohlížet jako na deterministický model s odezvou ve tvaru determinovaného signálu, která je pozorována s odchylkou v, mající charakter náhodné funkce času. Veličinou v respektujeme existenci náhodných chyb vznikajících při měření a existenci šumového signálu působícího na výstupu a majícího původ v identifikované soustavě. Často tuto náhodnou funkci v označujeme jako aditivní šum. Deterministický model lze považovat za zvláštní případ modelu stochastického s malou úrovní aditivního šumu (případně v souvislosti se stochastickým modelem hovořit o jeho deterministické části).



Obr. 5 Stochastický model

Podle charakteru matematického popisu modelu:

- **nelineární model -** alespoň jedna operace matematického popisu je nelineární.
- **lineární model -** všechny operace matematického popisu modelu jsou lineární. Objekt nazýváme lineárním, platí-li u něj princip superpozice tj. je-li jeho odezva na součet dvou signálů ekvivalentní součtu odezev na každou změnu vstupu zvlášť. Princip superpozice lze vyjádřit:

$$F(u_1 + u_2) = F(u_1) + F(u_2) \tag{2}$$

kde F je operátor modelu,
u_1, u_2 jsou vstupní veličiny soustavy.

Podle způsobu zpracování modelové informace

- **spojitý model -** vstupy a výstupy modelu se mění spojitě.
- **diskrétní model -** vstupy a výstupy modelu se mění v určitých diskrétních časových okamžicích $t = (1,2,....n)$. Někdy se mění nespojitým způsobem pouze vstup a výstupní veličina se mění spojitě, takovou soustavu považujeme za nespojitou.

Podle toho, jakým způsobem jsou parametry modelu obsaženy ve funkčních závislostech:

- **neparametrický model -** představuje zpravidla funkční závislost mezi zvoleným vstupním a odpovídajícím výstupním signálem, která se vyjadřuje buď graficky pomocí záznamu z měření odezev systému (zapisovače signálů) nebo pomocí tabulky hodnot, popisující číselně danou závislost. Neparametrické modely vyjadřují zpravidla přechodovou, impulsní nebo frekvenční charakteristiku v grafické nebo v tabulkové formě. Parametry modelu jsou pak obsaženy implicitně v těchto funkčních závislostech. Lze je získat až jejich následným vyhodnocením pro zvolenou strukturu modelu.

- **parametrický model** - má danou strukturu. Parametrické modely představují z matematického hlediska rovnice nebo soustavy rovnic a algebraické vztahy, které explicitně obsahují koeficienty těchto rovnic a vztahů. Obecně pak označujeme tyto koeficienty jako parametry matematických modelů. Výše uvedené charakteristiky jsou v tomto případě vyjádřené analyticky jako funkce nezávisle proměnné a konečného počtu parametrů, které jsou obvykle předmětem identifikace.

Předností neparametrických modelů je, že nevyžadují žádné informace o struktuře modelu. U parametrických modelů je však nutný předpoklad znalosti struktury systému. Kladnou stránkou parametrických modelů je jednoduché modelování na počítači, protože pomocí nevelkého objemu údajů o parametrech systému jsme schopni nejvhodněji popsat jeho dynamické chování. Při identifikaci se proto snažíme získat model v parametrické formě a neparametrické modely považujeme jen za mezivýsledky řešení, které je ještě třeba parametrizovat.

Podle rozložení sledovaného parametru ve vyšetřovaném objektu:

- **model se soustředěnými parametry -** model, který má stejné hodnoty sledovaných parametrů v celém prostoru objektu. Matematický popis tohoto modelu je tvořen soustavou obyčejných diferenciálních rovnic.
- **model s rozloženými parametry -** model, který má různé hodnoty sledovaných parametrů podle polohy v objektu. Matematický popis tohoto modelu je tvořen soustavou parciálních diferenciálních rovnic.

Podle charakteru vazby mezi vstupy a výstupy:

- **vnější model -** popisuje pouze relace "vstup - výstup". V případě lineárních a stacionárních systémů se ve funkci vnějších modelů používají vedle diferenciálních rovnic (spojité soustavy) a diferenčních rovnic (diskrétní soustavy) obrazové přenosy. Kromě přenosů se jako vnější modely používají také přechodové, impulsní a frekvenční charakteristiky.
- **vnitřní model** - je reprezentovaný relací "vstup - stav - výstup" a jedná se tedy o závislost zprostředkovanou přes stavové proměnné. Předností vnitřního (stavového) modelu je, že je vhodnější na aplikaci moderních matematických metod i na využití modelování prostředky výpočetní techniky.

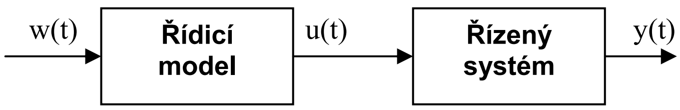
Podle toho, zda náhodná výstupní veličina je při determinovaném vstupu stacionární nebo nestacionární:

- **off-line model -** je stanovený na základě fyzikálních zákonů, technologických a konstrukčních vlastností, na základě izolovaně prováděných experimentů. Sestavený model pak zůstává po dobu činnosti zařízení zachován. Je zřejmé, že použití off-line modelů je přesně omezeno požadovaným stacionárním chováním identifikovaných objektů.

- **on-line model -** je neustále adaptivně zpřesňovaný po dobu činnosti zařízení, a to na základě nepřetržitě prováděných experimentů na identifikovaném objektu. Obecně je možno upravovat jak strukturu, tak i hodnoty odpovídajících parametrů.. Tím jsou do modelu zahrnuty proměnné podmínky, za kterých proces v daném časovém intervalu probíhá. Tyto modely se používají především u objektů s nestacionárním chováním, aby bylo dosaženo ekvivalence identifikovaného objektu a modelu. Tento model se používá v technické praxi častěji.

Podle účelu modelu:

- **poznávací model -** představuje prostředek k získání poznatků. Jde o pasivní roli, v níž model nepůsobí na zkoumaný proces nebo objekt přímo.
- **řídicí model -** využívá se k řízení procesů, tzn. aktivně působí na proces nebo objekt. Uplatňuje se zvláště tam, kde získání nezbytné informace o chování není možné přímým měřením (a neuplatňuje se zpětná vazba).



Obr. 6 Řídicí model

Podle toho, zda model využívá objektivních zákonitostí nebo znalostí subjektivních:

- **konvenční model (klasický) -** využívá objektivních zákonitostí vyplývajících z přírodních zákonů či experimentů.
- **nekonvenční model -** využívají pro svou tvorbu znalostí subjektivních, heuristických, vyplývajících z lidských zkušeností (fuzzy modely, expertní systémy, modely neuronových sítí, genetické algoritmy).

Shrnutí pojmů

Různá hlediska klasifikace modelů, deterministický a stochastický model a rozdíly mezi nimi, popsat jednotlivé druhy modelů.

Otázky

1. Definujte a vysvětlete pojem model.
2. Dle jakých hledisek můžeme dělit modely (vyjmenujte minimálně 7 hledisek).
3. Vysvětlete rozdíl mezi deterministickým a stochastickým modelem.
4. Na jaké modely dělíme modely dle stupně abstrakce reálného objektu, vysvětlete rozdíly těchto modelů.
5. Na jaké modely dělíme modely dle toho, zda model popisuje statické či dynamické vlastnosti systémů, vysvětlete rozdíly těchto modelů.

1.4. Úloha identifikace

Čas ke studiu: 1 hodinu

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat kritérium přiléhavosti a definovat jeho význam a vlastnosti.
- popsat postup identifikace systému.

Výklad

Celý komplex problémů a operací spojených s identifikací a modelováním můžeme principiálně rozdělit do těchto etap:

1. Přesná formulace úlohy, pro kterou se model vytváří.
2. Dekompozice složitého systému na relativně samostatné podsystémy, jejichž identifikaci jsme schopni realizovat.
3. Tvorba modelů podsystémů, získaných při dekompozici, což vyjadřuje:

   a) výběr vhodného technického zabezpečení experimentu a volbu správných vstupů a výstupů jednotlivých podsystémů,

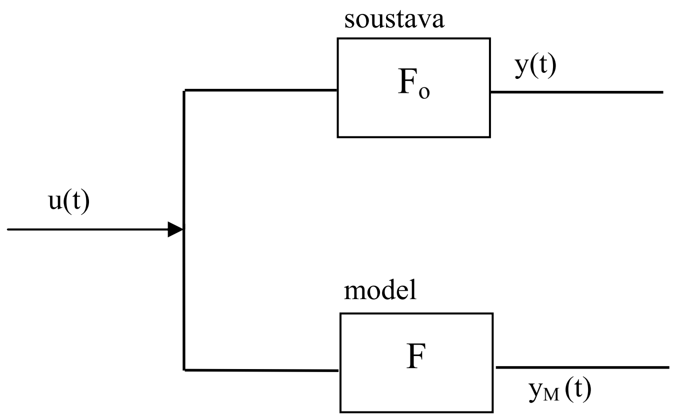
   b) měření vzájemně si odpovídajících vstupů a výstupů,

   c) vyhodnocením naměřených údajů vytvořit takový model, který dostatečně přesně dokáže ke zvoleným vstupním signálům přiřazovat správné odezvy na výstupech. Zde řešíme zpravidla následující tři okruhy problémů:
   -volba vhodné struktury modelu,
   -volba kritéria na porovnání shody modelu s vyšetřovaným objektem,

-volba algoritmu, který při zadané struktuře modelu minimalizuje prostřednictvím parametrů modelu hodnotu kriteriální funkce.

4. Sestavení celkového modelu systému z modelů jednotlivých podsystémů, vytvořených dekompozicí celku a ověření (verifikace) celkového modelu.
5. Následuje vlastní realizace modelu, přičemž obvykle budou jeho předpokládané vlastnosti ve značném rozporu se skutečností. V takovém případě se musíme vrátit zpět a opakovat práce od druhé etapy dokud se nedosáhne požadované shody modelu s reálným objektem. Zpřesňování modelu v této fázi se uskutečňuje hlavně na základě experimentální identifikace použitím principu "černé skříňky".

Na základě apriorních informací o objektu a podle záměrů řízení zjišťujeme, zda vyšetřovaný objekt je vhodné charakterizovat jako model: statický nebo dynamický, lineární nebo nelineární, s rozloženými parametry nebo se soustředěnými parametry, deterministický anebo stochastický, stacionární nebo nestacionární, spojitý nebo diskrétní, jednorozměrný anebo mnohorozměrný apod. Apriorní informace umožňují určit odhad počáteční struktury a druh použitého matematického modelu. Je zřejmé, že představa o struktuře modelu a druhu matematického modelu se může změnit po přezkoumání aposteriorních informací, případně se potvrdit.



Obr. 7 Porovnání odezev identifikované soustavy a modelu

Všechny uvedené informace můžeme zahrnout do operátoru modelu F, pomocí něhož budeme vstupu $u(t)$ přiřazovat odpovídající výstup $y_M(t)$, který chápeme jako odhad či aproximaci skutečného výstupu $y(t)$. Úlohou identifikace je odhad operátoru F_o objektu tak, že určíme operátor modelu F, který by se dostatečně blížil operátoru F_o.

Oba operátory mohou mít různou strukturu, mohou být zformulovány různými výrazovými prostředky. Abychom je dovedli porovnat, posuzujeme jejich blízkost podle odezvy identifikované soustavy $y(t)$ a modelu $y_M(t)$ na stejný vstupní signál $u(t)$ (obr. 7).

V této souvislosti zavádíme vhodné kritérium tzv. kritérium přiléhavosti, které umožňuje posuzovat míru shody obou operátorů v průběhu identifikace. Obecně je taková funkce ve tvaru:

$$J = f(y(t); y_M(t)) \tag{3}$$

Tato funkce má mít tyto vlastnosti:

a) má být nezáporná pro libovolná $y(t)$ a $y_M(t)$

b) má být rovna 0 pro $y(t) = y_M(\mathrm{t})$

c) má být spojitá pro oba argumenty $y(t)$ a $y_M(t)$.

Vhodnou funkcí tohoto typu je součet kvadrátů odchylek mezi experimentálně získanou odezvou a odezvou modelu na stejný vstupní signál. V průběhu identifikace je pak určován operátor modelu tak, aby toto kritérium dosahovalo svého minima. Kritérium přiléhavosti $J(x)$ je pak možno psát ve tvaru pro spojité soustavy:

$$J(x) = \int_0^T \left[y(t) - y_M(t)\right]^2 dt \tag{4}$$

pro diskrétní soustavy:

$$J(x) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - y_{Mi}\right]^2 \tag{5}$$

kde $y(t)$, $y_M(t)$ je spojitý výstup z reálné soustavy a modelu, y_i, y_{Mi} je diskrétní výstup z reálné soustavy a modelu, N je počet naměřených vzorků, x je vektor parametrů, např.: koeficienty obrazového přenosu zvolené struktury:

$$G(p) = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{Y_M(p)}{U(p)} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Parametry modelu jsou přestavovány tak, aby byla minimalizována odchylka obou výstupních signálů $y(t)$ a $y_M(t)$. Při automatickém nastavování parametrů modelu je nutné, aby systém identifikace byl vybaven zařízením pro minimalizaci kriteria $J(x)$ některou z numerických metod optimalizace parametrů (nejčastěji se pro minimalizaci tohoto kritéria používají gradientní metody). Úlohu řešíme jako nalezení extrému (minima) funkce více proměnných. Proměnné jsou v tomto případě hledané parametry, které jsou uloženy ve vektoru parametrů x (obr. 8).

Shrnutí pojmů

Etapy identifikace systémy, ověření správnosti identifikace systémů s využitím kritéria přiléhavosti, vlastnosti kritéria přiléhavosti..

Otázky

1. Popište etapy identifikace systému.
2. Co je úlohou identifikace.
3. Jak je možné ověřit správnost vytvořeného matematického popisu.
4. Co to je kritérium přiléhavosti.

1.5. Identifikace struktury a parametrů soustavy

Čas ke studiu: 0,5 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat a popsat identifikaci struktury a identifikaci parametrů.

Výklad

Při praktickém provádění identifikace je nutno nejprve určit strukturu operátoru F a pak teprve parametry této struktury.

Identifikace struktury

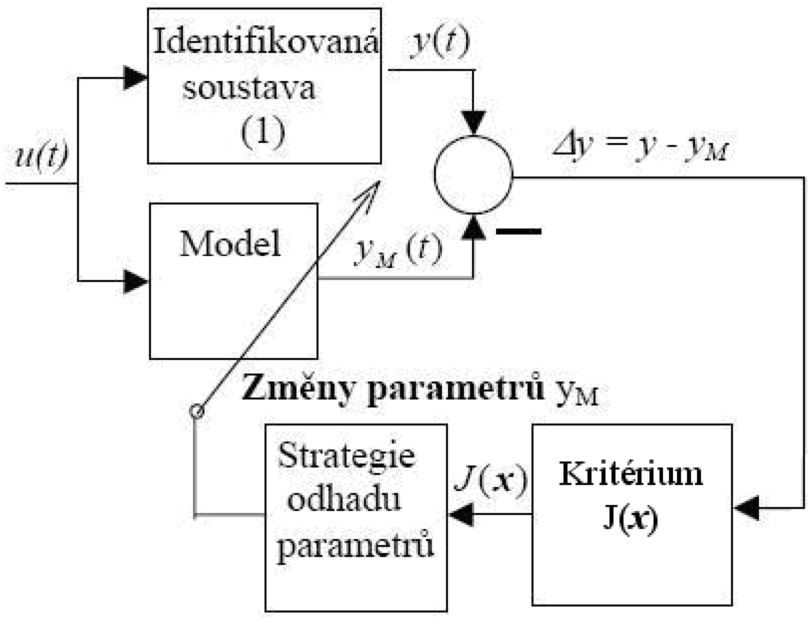
Strukturou modelu rozumíme způsob matematického vyjádření závislosti výstupního signálu na signálu vstupním např. ve tvaru diferenciální rovnice, diferenční rovnice, přenosu, přechodové, impulsní charakteristiky apod. Strukturu modelu obvykle volíme na základě apriorních předpokladů (informací) o soustavě.

K úlohám při identifikaci struktury soustavy patří:

- vyčlenění soustavy z prostředí,
- uspořádání vstupů a výstupů soustavy podle jejich vlivu na splnění cílů řízení,
- určení racionálního počtu vstupů a výstupů respektovaných v modelu,
- určení charakteru vztahu mezi vstupními a výstupními veličinami tj. určení operátoru F na základě apriorních informací o soustavě.

Identifikace parametrů

Identifikace parametrů se provádí on-line nebo off-line způsobem. Identifikací on-line se označuje identifikace, která se provádí v reálném čase přímo na reálné soustavě. Off-line identifikací pak označujeme identifikaci, při které nejdříve provedeme identifikační měření, které se ukládá na vhodné médium a pak následuje zpracování měření, které se již zpravidla provádí mimo zkoumaný objekt. U on-line identifikace je pak blok (1) na obr. 8 přímo identifikovanou soustavou. Při identifikaci off-line máme k dispozici soubor měření: vektor vstupů *u(t)* a vektor výstupů *y(t)*.



Obr. 8 Identifikace parametrů

Shrnutí pojmů

Identifikace struktury a identifikace parametrů

Otázky

1. Co je základní úlohou identifikace.
2. Co znamená identifikace struktury a identifikace parametrů.

2. METODY IDENTIFIKACE

2.1. Základy metod identifikace

Čas ke studiu: 0,5 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat základní metody identifikace.
- popsat princip analytické identifikace systému a vlastnosti vytvořeného popisu.

Výklad

Zkoumaný systém lze identifikovat buď **analyticky,** tj. pomocí metod matematicko-fyzikální analýzy nebo **empiricky**, tj. pomocí metod experimentálních. Praktické metody leží mezi těmito dvěma krajními případy. Nejvhodnější je postup využívající citlivou a vhodnou kombinaci obou přístupů. Častý je např. způsob, kdy se model sestavený matematicko-fyzikální analýzou používá pro určitý hrubý odhad vlastností vyšetřovaného objektu (především z hlediska struktury, kdy nalezneme přibližné matematické vztahy) a poté se provádí ověřování a zpřesňování parametrů modelu experimentálními metodami. Rovněž je možné navržený analytický model porovnávat s reálným objektem prostřednictvím dat získaných simulací matematického modelu pomocí počítače s daty získanými experimentálním způsobem. Takovéto kombinace obou přístupů jsou velmi vhodné, protože umožňují vedle hlubšího proniknutí do vnitřní struktury objektu model upřesňovat a korigovat na základě experimentu.

2.2. Identifikace metodou matematicko-fyzikální analýzy

Při analytickém způsobu identifikace sestavujeme matematický model na základě matematicko-fyzikální analýzy objektu. Vycházíme přitom z konstrukčních, technologických a provozních údajů o daném objektu. Podle fyzikálních, chemických a dalších zákonů matematicky popisujeme jevy probíhající v objektu a tím získáváme vztahy mezi sledovanými veličinami. Pomocí rovnic energetické a látkové rovnováhy, rovnic kontinuity atd. se snažíme stanovit vztahy mezi vstupními a výstupními veličinami soustavy. Tyto vztahy potom určují matematický model vyšetřovaného objektu vyjadřující vnitřní popis systému (tzv. bílá skříňka – white box). Do jaké hloubky jevů a struktury objektu musíme proniknout, záleží na účelu použití daného modelu. Čím hlubší provádíme analýzu, tím přesnější by měl být i matematický model. Bude však složitější, nákladnější, jeho odvození pracnější a používání náročnější. Proto je třeba zvážit, do jakých podrobností objekt analyzovat, aby sestavený model byl dostatečně přesný, ale aby nebyl příliš složitý a nákladný. Takto získaný matematický model je "strukturální", což znamená, že jeho jednotlivé vztahy odpovídají příslušným částem vyšetřovaného objektu. Struktury modelu a objektu jsou si podobné, v modelu jsou použity obvykle stejné vnitřní (stavové) proměnné jako v objektu. Výhodou je zřejmá souvislost mezi parametry modelu a konstrukčními parametry objektu a jeho dynamickými vlastnostmi. Předností analytického přístupu je i to, že můžeme dynamické vlastnosti objektu zjistit i před jeho vlastní realizací. Tak máme možnost již v etapě návrhu objektu případnými změnami ovlivňovat (optimalizovat) jeho dynamické vlastnosti. Získané modely mají zpravidla širší oblast platnosti než modely získané metodami experimentální identifikace.

Analytický přístup vyžaduje nejen důkladné znalosti matematické, ale také dokonalé znalosti oboru (technologie), do kterého vyšetřovaný objekt náleží. Analýza je často mimořádně obtížná, výsledné vztahy jsou neúměrně komplikované a je třeba je vhodně zjednodušovat. Přesnost a použitelnost modelu je omezená, jestliže uvažujeme různé náhodné vlivy a neurčitosti, které se ve většině reálných technických objektů projevují. Analytickým způsobem získáme vztahy mezi všemi vybranými veličinami v objektu. Z těchto vztahů můžeme určit jak stavové rovnice dynamického systému definovaného na vyšetřovaném objektu, tak i vnější popisy systému.

Σ Shrnutí pojmů

Způsoby identifikace systému, základní vlastnosti identifikace metodou matematicko-fyzikální analýzy.White box – black box.

? Otázky

1. Jaké jsou základní přístupy k identifikaci soustavy.
2. Vysvětlete princip identifikace metodou matematickou-fyzikální analýzy.
3. Co znamená white box a black box a jaké jsou mezimi hlavní rozdíly z hlediska identifikace systémů.

2.3. Základy Laplaceovy transformace

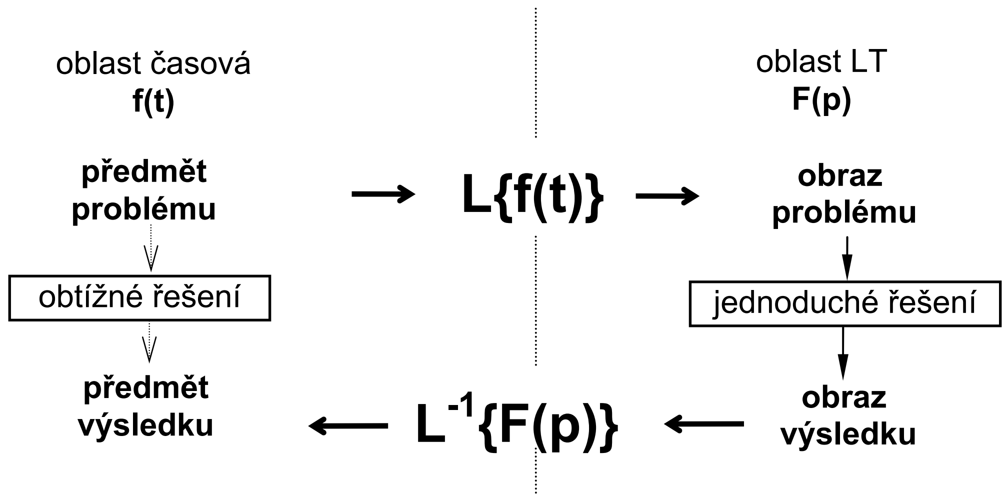
Čas ke studiu: 3 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat základní princip Laplaceovy transformace
- popsat základní vlastnosti Laplaceovy transformace
- převést funkci na její obraz v Laplaceově transformaci, vyřešit pomocí Laplaceovy transformace diferenciální rovnici.

Výklad

Je to integrální transformace, která převádí matematické operace jako je derivace nebo integrace v časové oblasti na násobení nebo dělení operátorem transformace *p*. Použitím této transformace lze některé obtížně řešitelné úlohy v časové oblasti převést na jednoduché řešení v operátorové oblasti podle schématu znázorněného na obrázku 9, kde je symbolem L{f(t)} označena transformace funkce času, symbolem $L^{-1}\{F(p)\}$ pak zpětná transformace Laplaceova obrazu do časové oblasti.



Obr. 9. Postup řešení při užití Laplaceovy transformace

Základní definiční integrál Laplaceovy transformace je

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\,dt \tag{10}$$

Takto definovanou Laplaceovou transformací lze řešit problémy v časové oblasti počínaje časem t = 0. Chování systému před tímto časem, tedy jak se systém dostal do výchozího stavu, nelze takto definovanou transformací řešit. Tento stav je popsán počátečními podmínkami řešení.

Abychom nemuseli stále vypočítávat obraz podle definičního integrálu a pak provádět zpětný převod do časové oblasti, jsou zpracovány slovníky LT - stručný slovník LT je v **Příloze 1.**

Při zápisu označujeme funkce v časové oblasti malými písmeny a říkáme jim *předměty*, funkce v operátorové oblasti označujeme stejnými velkými písmeny a říkáme jim *obrazy*. Výhody řešení užitím LT demonstrujeme na základních větách:

V2.1. Věta o obrazu derivace

Nechť $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ jsou spojité laplaceovsky transformovatelné funkce. Nechť $f^{(n)}(t)$ je po úsecích spojitá v intervalu <0,∞). Pak je $f^{(n)}(t)$ laplaceovsky transformovatelná a platí

$$f^{(n)}(t) = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \ldots - f^{(n-1)}(+0) \tag{11}$$

Symbolem $f^{(n-1)}(+0)$ označujeme derivace zprava. V uvedeném vztahu zahrnují vliv počátečních podmínek na řešení.

V2.2. Věta o obrazu integrálu

Nechť $f(t)$ je laplaceovsky transformovatelná funkce, která má obraz $F(p)$. Pak i funkce $\int_0^t f(t)dt = g(t)$ je laplaceovsky transformovatelná funkce a platí

$$\int_0^t f(t)dt = \frac{1}{p}F(p) \tag{12}$$

Laplaceova transformace umožňuje určit limity funkce $f(t)$, pokud tyto limity existují. LT ale existenci limit nepotvrzuje.

V2.3. Věta o počáteční hodnotě

Nechť *f(t)* je laplaceovsky transformovatelná funkce, která má obraz *F(p),* nechť existuje konečná $\lim_{t \to 0} f(t)$, pak

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{p \to \infty} pF(p) \qquad (13)$$

V2.4. Věta o konečné hodnotě

Za analogických předpokladů platí

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p) \qquad (14)$$

V2.5. Věta o translaci vpravo

Nechť *f(t)* je laplaceovsky transformovatelná funkce, která má obraz *F(p).* Pak i funkce $f(t-\tau).\eta(t-\tau)$, kde $\eta(t)$ je tzv. Heavisideův jednotkový skok (viz dále), je laplaceovsky transformovatelná funkce a platí

$$f(t-\tau).\eta(t-\tau) = e^{-p\tau}.F(p) \qquad (15)$$

Diferenciální rovnici popisující vlastnosti systému v obecném tvaru můžeme zapsat v následujícím tvaru

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_0 u(t) \qquad (2.5)$$

kde a_i, b_j jsou konstantní koeficienty, *u(t)* je vstup, *y(t)* je výstup systému. Z podmínky fyzikální realizovatelnosti plyne $m \le n$. Řád diferenciální rovnice je roven řádu systému. Řešení rovnice je možno získat, máme-li určeny počáteční podmínky a tvar vstupního signálu *u(t).*

Tuto diferenciální rovnici můžeme při nulových počátečních podmínkách (tzn. $y^{(n-1)}(0),\ldots,y(0)$ a $u^{(m-1)}(0), \ldots, u(0)$) použitím věty o obrazu derivace V2.1 převést na *přenos soustavy (obrazový přenos)* - což je obraz diferenciální rovnice při nulových počátečních podmínkách.

$$a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \ldots + a_0 Y(p) = b_m p^m U(p) + \ldots + b_0 U(p) \qquad (16)$$

$$Y(p)(a_n p^n + \ldots + a_0) = U(p)(b_m p^m + \ldots + b_0) \qquad (17)$$

Z čehož obrazový přenos

$$G(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{b_m p^m+...+b_0}{a_n p^n+...+a_0} \tag{18}$$

Základní rovnice přenosu

$$G(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{b_0+b_1 p+.....+b_m p^m}{a_0+a_1 p+......+a_n p^n} \tag{19}$$

se často upravuje:

$$G(p)=\frac{\frac{b_0}{a_0}+\frac{b_1}{a_0}p+.....+\frac{b_m}{a_0}p^m}{1+\frac{a_1}{a_0}p+....+\frac{a_n}{a_0}p^n}=\frac{\beta_0+\beta_1 p+....+\beta_m p^m}{1+\alpha_1 p+....+\alpha_n p^n}=\frac{\sum_{j=0}^{m}\beta_j p^j}{1+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i p^i} \tag{20}$$

V praxi má přenos soustavy často tvar

$$G(p)=\frac{\frac{b_0}{a_0}}{1+\frac{a_1}{a_0}p+....+\frac{a_n}{a_0}p^n}=\frac{K}{1+T_1 p+T_2^2 p^2+....+T_n^n p^n} \tag{21}$$

kde K je zesílení soustavy - vystupující jako měřítko. Po vydělení rovnice zesílením K získáme další často užívaný tvar

$$G(p)=\frac{1}{s_0+s_1 p+s_2 p^2+....+s_n p^n} \tag{22}$$

Při formálním nahrazení Laplaceova operátoru výrazem jω dostaneme přenos ve frekvenční oblasti (tzv. frekvenční přenos vyjádřený pomocí Fourierovy transformace), kde $\omega = 2\pi f$ je kruhová frekvence. Je však nutno poznamenat, že podmínky aplikace Fourierovy a Laplaceovy transformace na funkci času se liší.

Příloha 1 – Základní slovník Laplaceovy transformace

	$f(t)$	$F(p)$ $\quad p = s$
1	$\delta(t)$ jednotkový (Diracův) impuls	1
2	$f(t) = 1$ pro $t \geq 0$ jinak $f(t) = 0$	$\frac{1}{p}$
3	a	$\frac{a}{p}$
4	t	$\frac{1}{p^2}$
5	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
7	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{p(p+a)}$
8	$\sin bt$	$\frac{b}{p^2+b^2}$
9	$\cos bt$	$\frac{p}{p^2+b^2}$
10	$e^{-at}\sin bt$	$\frac{b}{(p+a)^2+b^2}$
11	$e^{-at}\cos bt$	$\frac{p+a}{(p+a)^2+b^2}$
12	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
13	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
14	$t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{(n-1)!}{(p+a)^n}$
15	$\sin h\, bt$	$\frac{b}{p^2-b^2}$
16	$\cos h\, bt$	$\frac{p}{p^2-b^2}$
17	$e^{-at}(1-at)$	$\frac{p}{(p+a)^2}$
18	$1-\cos bt$	$\frac{b^2}{p(p^2+b^2)}$

Řešený příklad

Zadání

Převeďte funkci na její obraz v L-transformaci dle definičního vztahu, při předpokladu nulových počátečních podmínek, x(0)=0.

$f = x'(t)$

PŘEVOD FUNKCE NA JEJÍ OBRAZ V L-TRANSFORMACI DLE DEFINIČNÍHO VZTAHU

Definiční vztah přímé L-transformace: $X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt$

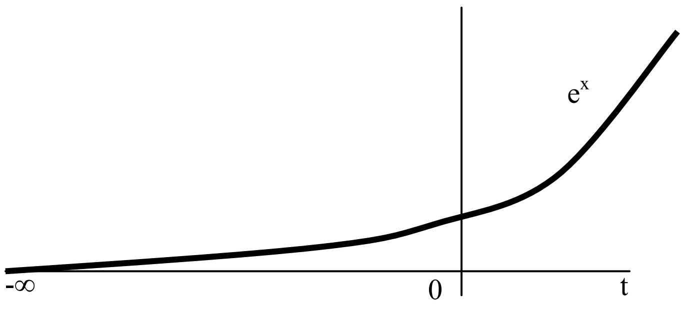
Řešení:

$$L\{x'(t)\} = \int_0^{\infty} x'(t) \cdot e^{-p \cdot t} dt = \left| \begin{array}{cc} u' = x'(t) & v = e^{-pt} \\ u = x(t) & v' = -p \cdot e^{-pt} \\ (u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v & \\ u' \cdot v = (u \cdot v)' - u \cdot v' & \end{array} \right| = \int_0^{\infty} \left[(x(t) \cdot e^{-pt})' - x(t) \cdot (-p \cdot e^{-pt}) \right] dt =$$

$$= \left[x(t) \cdot e^{-pt} \right]_0^{\infty} + p \cdot \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-pt} dt = x(\infty) \cdot e^{-p \cdot \infty} - x(0) \cdot e^{-p \cdot 0} + p \cdot X(p) = 0 - 0 + p \cdot X(p) = \underline{\underline{p \cdot X(p)}}$$

Exponenciální funkce pro -∞ konverguje k nule (viz. obrázek) tedy: $x(\infty) \cdot e^{-p \cdot \infty} = x(\infty) \cdot 0 \to 0$

Při nulových počátečních podmínkách platí: $x(0) \cdot e^{-p \cdot 0} = 0 \cdot 1 \to 0$



Řešený příklad

Zadání

Převeďte funkci na její obraz v L-transformaci dle definičního vztahu, při předpokladu nulových počátečních podmínek, x(0)=0.

$f = a \cdot t$

Řešení:

$$L\{a \cdot t\} = \int_0^\infty a \cdot t \cdot e^{-p \cdot t} dt = a \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{-p \cdot t} dt = \left| \begin{array}{ll} \quad u = t & v' = e^{-pt} \\ \quad u' = 1 & v = -\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \\ (u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v & \\ u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v & \end{array} \right| =$$

$$= a \cdot \int_0^\infty \left[(t \cdot -\frac{1}{p} e^{-pt})' - 1 \cdot (-\frac{1}{p} \cdot e^{-pt}) \right] dt = a \left[t \cdot -\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^\infty - a \cdot \int_0^\infty 1 \cdot -\frac{1}{p} e^{-pt} dt =$$

$$= a \left[t \cdot -\frac{1}{p} e^{-pt} \right]_0^\infty + \frac{a}{p} \cdot \int_0^\infty e^{-pt} dt = \left[-\frac{a}{p} \cdot t \cdot e^{-pt} \right]_0^\infty + \frac{a}{p} \cdot \left[-\frac{1}{p} \cdot e^{-pt} \right]_0^\infty =$$

$$= -\frac{a}{p} \cdot \infty \cdot e^{-p \cdot \infty} - -\frac{a}{p} \cdot 0 \cdot e^{-p \cdot 0} - \frac{a}{p^2} \left(\cdot e^{-p \cdot \infty} - \cdot e^{-p \cdot 0} \right) = 0 + 0 - \frac{a}{p^2} \cdot (0 - 1) = \underline{\underline{\frac{a}{p^2}}}$$

Řešený příklad

Zadání

Převeďte funkci na její obraz v L-transformaci dle definičního vztahu, při předpokladu nulových počátečních podmínek, x(0)=0.

$$f = e^{-a \cdot t}$$

Řešení:

$$L\left\{e^{-a\cdot t}\right\} = \int_0^\infty e^{-a\cdot t}\cdot e^{-p\cdot t}dt = \int_0^\infty e^{-a\cdot t - p\cdot t}dt = \left| \begin{array}{l} u = t\cdot(-a-p) \\ du = (-a-p)dt \\ dt = \dfrac{du}{-(a+p)} \end{array} \right| = \int e^u \cdot \frac{du}{-(a+p)} = -\frac{1}{a+p}\int e^u du =$$

$$= -\frac{1}{a+p}\left[e^{t\cdot(-a-p)}\right]_0^\infty = -\frac{1}{a+p}\left[e^{\infty\cdot(-a-p)} - e^{0\cdot(-a-p)}\right] = -\frac{1}{p+a}\left[0-1\right] = \underline{\underline{\frac{1}{p+a}}}$$

VĚTA O DERIVACI FUNKCE PŘI NENULOVÝCH POČÁTEČNÍCH PODMÍNKÁCH

při nulových počátečních podmínkách $L\left\{x^{(n)}(t)\right\} = p^n \cdot X(p)$

při nenulových počátečních podmínkách

$$L\left\{x^{(n)}(t)\right\} = p^n \cdot X(p) - p^{n-1}\cdot x(0) - p^{n-2}\cdot x'(0) - \cdots - p^2 \cdot x^{(n-3)}(0) - p^1 \cdot x^{(n-2)}(0) - p^0 \cdot x^{(n-1)}(0)$$

$$L\left\{x^{(4)}(t)\right\} = p^4 \cdot X(p) - p^{4-1}\cdot x(0) - p^{4-2}\cdot x'(0) - p^{4-3}\cdot x''(0) - p^{4-4}\cdot x'''(0)$$

$$L\left\{x'''(t)\right\} = p^3 \cdot X(p) - p^{3-1}\cdot x(0) - p^{3-2}\cdot x'(0) - p^{3-3}\cdot x''(0)$$

$$L\left\{x''(t)\right\} = p^2 \cdot X(p) - p^{2-1}\cdot x(0) - p^{2-2}\cdot x'(0)$$

Transformace funkce s využitím parciálních zlomků prvního druhu

Řešený příklad

Zadání

Převeďte obraz funkce v L-transformaci na její originál s využitím parciálních zlomků a při předpokladu nulových počátečních podmínek, x(0)=0.

$$F(p)=\frac{3p+4}{(p+2)(p+3)(p+4)}$$

Řešení:

Provedeme rozklad na parciální zlomky

$$\frac{3p+4}{(p+2)(p+3)(p+4)}=\frac{A}{p+2}+\frac{B}{p+3}+\frac{C}{p+4}\quad \text{cíl: stanovit konstanty A, B, C}$$

Vynásobíme celou rovnici jmenovatelem zlomku na levé straně

$$\frac{3p+4}{(p+2)(p+3)(p+4)}\cdot(p+2)(p+3)(p+4)=$$

$$=\frac{A}{p+2}\cdot(p+2)(p+3)(p+4)+\frac{B}{p+3}\cdot(p+2)(p+3)(p+4)+\frac{C}{p+4}\cdot(p+2)(p+3)(p+4)$$

Upravíme

$$3p+4=A\cdot(p+3)(p+4)+B\cdot(p+2)(p+4)+C\cdot(p+2)(p+3)$$

Roznásobíme pravou stranu

$$3p+4=A\cdot p^2+7\cdot A\cdot p+12\cdot A+B\cdot p^2+6\cdot B\cdot p+8\cdot B+C\cdot p^2+5\cdot C\cdot p+6\cdot C$$

Z rovnice vytvoříme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
p^2 &: \quad 0=A+B+C\\
p^1 &: \quad 3=7\cdot A+6\cdot B+5\cdot C\\
p^0 &: \quad 4=12\cdot A+8\cdot B+6\cdot C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p^2 &: \quad 0=A+B+C \qquad \Rightarrow C=-A-B\\
p^1 &: \quad 3=7\cdot A+6\cdot B+5\cdot(-A-B)\\
p^0 &: \quad 4=12\cdot A+8\cdot B+6\cdot(-A-B)
\end{aligned}$$

$$p^1: \quad 3 = 2\cdot A + B \qquad\qquad \Rightarrow B = 3 - 2\cdot A$$

$$p^0: \quad 4 = 6\cdot A + 2\cdot(3 - 2\cdot A) \quad \Rightarrow A = -1$$

$B = 5$

$C = -4$

$$L^{-1}\left\{\frac{3p+4}{(p+2)(p+3)(p+4)}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{p+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{B}{p+3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{C}{p+4}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{-1}{p+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{5}{p+3}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-4}{p+4}\right\} =$$

$$= -1\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} + 5\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p+3}\right\} + -4\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p+4}\right\} = \underline{\underline{-e^{-2\cdot t} + 5\cdot e^{-3\cdot t} - 4\cdot e^{-4\cdot t}}}$$

Z Laplaceova slovníku vztah 6: $L^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\} \to e^{-a\cdot t}$

$$-1\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} = \underline{\underline{-e^{-2\cdot t}}}$$

$$5\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p+3}\right\} = \underline{\underline{5\cdot e^{-3\cdot t}}}$$

$$-4\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p+4}\right\} = \underline{\underline{-4\cdot e^{-4\cdot t}}}$$

ŘEŠENÍ DIFERENCIÁLNÍCH ROVNIC L-TRANSFORMACÍ

Řešený příklad

Zadání

Řešte zadanou diferenciální rovnici pomocí L-transformace.

$$y''(t) + 5\cdot y'(t) + 6\cdot y(t) = 12 \qquad\qquad y'(0) = 0 \quad y(0) = 2$$

Řešení:

Převedeme diferenciální rovnici do L´transformace s využitím věty o derivaci

$$p^2 \cdot Y(p) - p^1 \cdot y(0) - p^0 \cdot y'(0) + 5 \cdot p \cdot Y(p) - 5 \cdot p^0 \cdot y(0) + 6 \cdot Y(p) = \frac{12}{p}$$

Z Laplaceova slovníku vztah 3: $L\{a\} = \frac{a}{p}$

$$L\{12\} = \frac{12}{p}$$

dosadíme počáteční podmínky a vyřešíme

$$p^2 \cdot Y(p) - p^1 \cdot 2 - p^0 \cdot 0 + 5 \cdot p \cdot Y(p) - 5 \cdot p^0 \cdot 2 + 6 \cdot Y(p) = \frac{12}{p}$$

$$p^2 \cdot Y(p) - p \cdot 2 + 5 \cdot p \cdot Y(p) - 5 \cdot 2 + 6 \cdot Y(p) = \frac{12}{p}$$

$$p^2 \cdot Y(p) + 5 \cdot p \cdot Y(p) + 6 \cdot Y(p) = \frac{12}{p} + 10 + 2 \cdot p$$

$$Y(p) \cdot (p^2 + 5 \cdot p + 6) = \frac{12 + 10 \cdot p + 2 \cdot p^2}{p}$$

$$Y(p) \cdot (p^2 + 5 \cdot p + 6) = \frac{2 \cdot (p^2 + 5 \cdot p + 6)}{p}$$

$$Y(p) = \frac{2 \cdot (p^2 + 5 \cdot p + 6)}{p \cdot (p^2 + 5 \cdot p + 6)}$$

$\underline{\underline{Y(p) = \frac{2}{p}}}$ řešení diferenciální rovnice v L-transformaci (obraz řešení)

$$y(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{p}\right\} = 2$$

$\underline{\underline{y(t) = 2}}$ řešení diferenciální rovnice (originál řešení)

Řešený příklad

Zadání

Řešte zadanou diferenciální rovnici pomocí L-transformace.

$$y'(t) + 3 \cdot y(t) = e^{-2 \cdot t} \qquad y(0) = 0$$

Řešení:

Převedeme diferenciální rovnici do L-transformace s využitím věty o derivaci

$$p \cdot Y(p) - p^{1-1} \cdot y(0) + 3 \cdot Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

Z Laplaceova slovníku vztah 6: $L\{e^{-at}\} = \dfrac{1}{p+a}$

$$L\{e^{-2 \cdot t}\} = \frac{1}{p+2}$$

dosadíme počáteční podmínky a vyřešíme

$$p \cdot Y(p) - 1 \cdot 0 + 3 \cdot Y(p) = \frac{1}{p+2}$$

$$Y(p) \cdot (p+3) = \frac{1}{p+2}$$

$\underline{\underline{Y(p) \cdot = \dfrac{1}{(p+2) \cdot (p+3)}}}$ řešení diferenciální rovnice v L-transformaci (obraz řešení)

$$y(t) \cdot = L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2) \cdot (p+3)}\right\} = e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t}$$

vztah 12: $\dfrac{b-a}{(p+a) \cdot (p+b)} \qquad e^{-a \cdot t} - e^{-b \cdot t}$

$\underline{\underline{y(t) \cdot = e^{-2 \cdot t} - e^{-3 \cdot t}}}$ řešení diferenciální rovnice (originál řešení)

CD-ROM_1 – Přímá Laplaceova transformace (ANIMACE_2_A)

V rámci animace je možné se seznámit s převodem funkcí do Laplaceovy transformace.

CD-ROM_2 – Řešení DR pomocí LT (ANIMACE_2_B)

V rámci animace je možné se seznámit s převodem a řešením diferenciálních rovnic do Laplaceovy transformace.

Shrnutí pojmů

Princip Laplaceovy transformace, přímá Laplacova transformace, zpětná Laplaceova transformace, obraz, originál, operátorový přenos, vlastnosti a věty Laplaceovy transformace.

Otázky

1. Vysvětlete princip Laplaceovy transformace.
2. Jakými symboly označujeme přímou a zpětnou Laplaceovu transformaci.
3. Vyjmenujte věty Laplaceovy transformace.

Úlohy k řešení

1. Převeďte funkci $f = a$ na její obraz v L-transformaci dle definičního vztahu, při předpokladu nulových počátečních podmínek, x(0)=0, a=konstanta.
2. Převeďte funkci $f = t$ na její obraz v L-transformaci dle definičního vztahu, při předpokladu nulových počátečních podmínek, x(0)=0.
3. Převeďte funkci $f = \frac{1}{a} \cdot \left(1 - e^{-a \cdot t}\right)$ na její obraz v L-transformaci dle definičního vztahu, při předpokladu nulových počátečních podmínek, x(0)=0, a=konstanta.
4. Převeďte obraz funkce v L-transformaci $F(p) = \frac{3p + 4}{p^2 + 5 \cdot p + 6}$ na její originál s využitím parciálních zlomků a při předpokladu nulových počátečních podmínek, x(0)=0.

2.4. Postup při sestavování analytických modelů

Čas ke studiu: 3 hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat pojem linearizace a metody linearizace.
- popsat postup při tvorbě analytického modelu
- vyřešit jednoduché analytické modely technických systémů.

Výklad

Postup při sestavování matematického modelu můžeme rozdělit do tří fází.

První fáze spočívá ve **výběru souboru veličin a vztahů mezi nimi**, pomocí kterých je možno dostatečně přesně popsat uvažovaný reálný proces. U složitých objektů provádíme pro potřeby analýzy dekompozici objektu na jednodušší části (podsystémy) a určujeme vazbové (hraniční podmínky). Výběrem příliš velkého počtu veličin pro sestavení modelu se může stát, že model bude příliš složitý a analýza mimořádně obtížná. Proto je nutné eliminovat nepodstatné veličiny, na které je proces málo citlivý, což představuje první zjednodušující fázi. Nesmíme však zanedbat podstatné veličiny, což by bylo na úkor adekvátnosti modelu reálnému objektu. Rovněž otázka vhodné dekompozice složitého objektu není vždy jednoduchá a vyžaduje určité zkušenosti a intuici.

Druhou fází je sestavení **obecných závislostí (fyzikálních vztahů) mezi vybranými veličinami objektu**. Jedná se o vlastní fázi vytváření struktury matematického modelu objektu a patří k nejobtížnějším fázím identifikace. Tato fáze předpokládá dobrou znalost odborné problematiky do níž objekt svou fyzikální povahou náleží a rovněž znalost příbuzných a teoretických disciplín. Analytik musí mít schopnost posoudit, které závislosti jsou podstatné jak z hlediska chování procesu, tak i z hlediska řízení. Při tvorbě struktury modelu se většinou vychází ze známých fyzikálních zákonů anebo rozličných závislostí odvozených anebo stanovených empiricky. Zákony, které nejčastěji používáme při analýze, můžeme rozdělit na:

- **zákony typu zachování** - všeobecný tvar zákona zachování můžeme popsat následujícím vztahem:

$$\sum \textit{přítoků} + \sum \textit{zdrojů} - \sum \textit{odtoků} - \sum \textit{zániků} = \textit{časová změna akumulace}$$

Tento vztah představuje v podstatě bilanční rovnici, kterou můžeme aplikovat na tok určité formy hmoty nebo energie vyšetřovaným objektem. Pojmy zdroj (vznik) a zánik, použité ve všeobecné rovnici, je třeba chápat ve smyslu transformace jedné formy (např. energie) na druhou. Jestliže je vyšetřovaný proces ustálený, pak časová změna akumulace je rovna nule (ustálený stav objektu).

- **zákony typu sdílení -** při procesech, které probíhají samovolně jen v určitém směru (nevratné procesy) nestačí popis bilanční rovnice předcházejícího typu. Je třeba ještě použít zákon typu sdílení, jehož všeobecný tvar můžeme popsat následujícím vztahem:

  tok = součinitel přenosu $*$ *gradient určujícího parametru*

  kde součinitel přenosu je převrácená hodnota odporu sdílení (např. Fourierův zákon sdílení tepla vedením, Ohmův zákon apod).

- **stavové rovnice** - jestliže existuje ve vyšetřovaném objektu více stavových veličin navzájem nezávislých a působících na dynamiku procesu, je třeba sestavit stavové rovnice interpretující vazby mezi stavovými veličinami. Stavové rovnice je nutné odvodit z příslušných fyzikálních vztahů mezi stavovými veličinami (např. stavová rovnice plynů).

- **bilance entropie** - jestliže obsahuje vyšetřovaný proces dva nebo více částečných nevratných dějů (např. difúze a vedení tepla), vznikají superpozicí nové jevy a pro popis dynamiky jsou nevyhnutelné rovnice bilance entropie.

Pro matematický popis vyšetřovaných objektů se používají různé druhy rovnic. Přitom je nutné vzít do úvahy rozložení sledovaného parametru v objektu, v němž probíhá proces. Procesy, které mají stejné hodnoty sledovaných veličin v celém prostoru zařízení, nazýváme procesy se soustředěnými parametry. Procesy, jejichž sledované veličiny mají různou hodnotu podle místa v objektu, nazýváme procesy s rozloženými parametry.

Na algebraické rovnice obvykle vede matematický popis stacionárních režimů procesů (popis statického chování, tj. ustáleného stavu procesů se soustředěnými parametry). Obyčejné diferenciální rovnice se používají při matematickém popisu nestacionárních režimů (dynamiky neboli přechodových stavů) procesů se soustředěnými parametry, jakož i stacionárních režimů (statického chování) procesů s rozloženými parametry, u nichž hodnoty sledovaných veličin závisí pouze na jedné prostorové souřadnici. V prvním případě se v diferenciálních rovnicích jako nezávisle proměnná volí čas, v druhém případě je to prostorová souřadnice. Při matematickém popisu objektů pomocí obyčejných diferenciálních rovnic je nevyhnutelné zadání počátečních podmínek. Parciální diferenciální rovnice se používají při matematickém popisu dynamiky procesů s rozloženými parametry nebo stacionárních režimů takových procesů, ve kterých rozloženost je ve více než jedné prostorové souřadnici. Při popisu dynamiky procesu takovými rovnicemi je třeba současně s počátečními podmínkami zadat i okrajové podmínky, které jsou obecně funkcemi času. Pro stacionární režimy procesů charakterizovaných parciálními diferenciálními rovnicemi se zadávají pouze počáteční podmínky, které závisejí na souřadnicích.

Poslední fází analýzy je tzv. **specifikace modelu procesu, tj. určení hodnot neznámých parametrů a koeficientů odvozeného systému rovnic**, které určují platnost modelu pro daný konkrétní objekt v konkrétních podmínkách.

Matematický model objektu získaný teoretickou analýzou je třeba vždy upravit do tvaru, ze kterého by byly zřejmé dynamické vlastnosti vyšetřovaného objektu, případně do tvaru, který by byl vhodný na další použití. I při identifikaci relativně jednoduchých objektů vznikají komplikované a složité modely, jejichž řešení z hlediska rozsahu výpočtů by bylo neekonomické. Proto v další fázi je nutné model zjednodušovat (aproximovat), kdy se původní matematické vztahy nahrazují jednoduššími a získává se model v použitelnějším (jednodušším) tvaru, avšak zachovávající a nezkreslující ty vlastnosti a relace na objektu, které vyšetřujeme. Důsledná fyzikální analýza vede zpravidla na složitější typy rovnic (diferenciální nelineární, diferenciální parciální, integrálně - diferenciální, případně algebraické nelineární výrazy), jejichž přímé analytické řešení je obtížné a které značně komplikují další využití výsledků. Operace s lineárními modely při analýze i syntéze jsou neporovnatelně jednodušší než s modely nelineárními, a proto podle možnosti přistupujeme k **linearizaci** nelineárních systémů. Pro malé změny vstupních a výstupních signálů můžeme předpokládat, že vztah mezi nimi je lineární tj. vyjádřitelný lineárními diferenciálními rovnicemi. Linearizaci matematického popisu soustav je možno provést různými metodami:

1. rozvoj nelineárního vztahu v řadu a využití pouze lineárních členů,
2. linearizace popisu prvků, ze kterých se soustava skládá,
3. linearizace pomocí aproximace metodou nejmenších čtverců.

Příklad linearizace podle bodu 1:

K rozvoji v řadu zpravidla využíváme Taylorova vzorce. Za předpokladu, že funkce *f(x)* má v bodě x_o derivaci *n*-tého řádu, lze pro funkci jedné proměnné psát:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \tag{7}$$

kde $x - x_0 = \Delta x$ je malá odchylka od pracovního bodu.

Při popisu soustavy se uplatňují pouze první dva členy na pravé straně rovnice, které tvoří lineární funkci. Obdobný rozvoj lze vytvořit i pro funkci více proměnných. Geometrickou interpretací této linearizace je pro jednu proměnnou aproximace tečnou v uvažovaném bodě, pro dvě proměnné aproximace zakřivené plochy tečnou rovinou. Pro malé odchylky od pracovního bodu pro funkci $y = f(x)$ přibližně platí:

Pro malé odchylky od pracovního bodu x_0 pro funkci $y=f(x)$ přibližně platí

$$\Delta y = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x = x_0} \Delta x \quad = \quad k \; \Delta x \tag{8}$$

pro funkci dvou proměnných $v=f(x,y)$

$$\Delta v = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x=x_0} \Delta x \quad + \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{y=y_0} \Delta y \quad = \quad k_1 \, \Delta x \quad + \quad k_2 \, \Delta y \tag{9}$$

Často se zavádějí bezrozměrné proměnné:

$$\varphi\, x = \frac{\Delta x}{x_0} \qquad \varphi\, y = \frac{\Delta y}{y_0} \qquad \varphi\, v = \frac{\Delta v}{v_0} \tag{10}$$

Proces zjednodušování není jednoduchý, vyžaduje velkou zkušenost a hrozí při něm nebezpečí, že výsledný model nebude adekvátní objektu. Dostatečně všeobecná a spolehlivá metoda aproximace zaručující požadovanou shodu chování původního a zjednodušeného modelu neexistuje. V celém procesu tvorby modelu zavádíme řadu předpokladů, zjednodušení a aproximací, které mají vliv na přesnost modelu. Tato skutečnost je jedním z důvodů, proč analyticky odvozený model, jakmile je to možné, experimentálně testujeme.

Další práce s matematickým modelem vyšetřovaného objektu se může realizovat v časové nebo frekvenční oblasti. V prvním případě je pro další postup důležité, zda se z rovnic modelu vyloučí vnitřní (stavové) veličiny anebo ne. Klasický, nejčastěji používaný postup, předpokládá vyloučení stavových veličin a úpravu modelu do tvaru systému diferenciálních rovnic objektu obsahujících pouze vstupní a výstupní proměnné. Jejich řešením dostáváme časový průběh odezvy výstupního signálu na signál vstupní. Moderní teorie řízení využívá pro popis dynamiky objektu metody stavového prostoru. Vyšetřovaný objekt je potom mimo vektoru vstupních a výstupních veličin charakterizovaný vektorem stavových veličin, určujících stav objektu. Výhody použití stavových metod se projeví hlavně při vyšetřování složitých objektů. Při řešení matematického modelu ve frekvenční oblasti se původní soustava rovnic transponuje vhodnou integrální transformací. Dále se pracuje s přenosovou funkcí ať už v analytickém nebo grafickém vyjádření.

V současné době se pro matematické modelování používají prostředky číslicové výpočetní techniky. Chceme-li proto řešit diferenciální rovnice na číslicovém počítači, musíme provést vhodnou matematickou úpravu. Jednou z možností je převedení diferenciální rovnice n-tého řádu na systém n rovnic prvního řádu a tento potom řešit vhodnou numerickou metodou. V případě modelování spojitých procesů pro účely číslicového řízení, musíme převést spojitý matematický model řízeného objektu ze spojitého tvaru (např. ve tvaru diferenciálních rovnic nebo operátorových přenosů) na model diskrétní (např. ve tvaru diferenčních rovnic nebo diskrétních přenosů).

2.5. Příklady sestavování analytických modelů jednoduchých objektů

Pro sestavování analytických matematických modelů je užitečná metoda blokových schémat (blokové algebry) při níž postupujeme následovně:

1. Sestavíme skutečné funkční a technické schéma modelovaného objektu.
2. Označíme všechny prvky a veličiny vyskytující se v objektu a směr působení veličin a signálů.
3. Pro vztahy jednotlivých veličin mezi sebou sestavíme matematicko-fyzikální analýzou příslušné diferenciální rovnice s obecnými konstantami. Výstupní veličiny považujeme jako závislé, vstupní jako nezávisle proměnné. Vstupní veličiny do jednotlivých subsystémů mohou být též výstupními veličinami z předcházejících subsystémů. V takovém případě je někdy vhodné postupovat od konce tak, až se dostaneme ke vstupním veličinám systému.
4. Na základě diferenciálních rovnic a vzájemných vazeb jednotlivých veličin sestavíme blokové schéma. Jednotlivé bloky popíšeme a vyznačíme příslušné vstupní a výstupní veličiny.
5. Jsou-li statické vztahy jednotlivých veličin lineární nebo v okolí pracovních bodů linearizovatelné, můžeme nahradit jednotlivé bloky operátorovými přenosy. Nejsou-li statické vztahy lineární, může nám posloužit blokové schéma jako podklad pro modelování na počítači.
6. Máme-li označeny jednotlivé bloky přenosovými funkcemi, zjednodušíme celé schéma podle pravidel blokové algebry až na operátorový přenos, vyjadřující poměr mezi operátorovými obrazy příslušné výstupní a vstupní veličiny.

Postup při matematicko-fyzikální analýze si budeme ilustrovat na několika příkladech analýzy dynamických vlastností různých objektů.

Řešený příklad

Zadání

- **Ohřev materiálu v peci**

Sestavte diferenciální rovnici ohřevu kovu v ohřívací peci. Výměna tepla probíhá v souladu s Newtonovým zákonem přestupu tepla konvekcí. Výstupní veličinou je teplota povrchu kovu $\upsilon_k(t)$ [K], vstupní veličinou je teplota pece $\upsilon_p(t)$ [K]. Ohřívaný povrch kovu je S [m^2], jeho hmotnost m [kg], měrné teplo c [J kg^{-1} K^{-1}] a součinitel přestupu tepla konvekcí α [W m^{-2} K^{-1}]. Určete operátorový přenos ohřevu materiálu v peci a nakreslete blokové schéma.

Řešení

Množství tepla předané horkými plyny za čas dt je dáno Newtonovým zákonem:

$$dQ = \alpha \,.\, S \,.\, (\vartheta_p(t) - \vartheta_k(t)) \,.\, dt \tag{11}$$

Předané teplo se spotřebuje na změnu teploty kovu o $d\upsilon_k(t)$ a tepelná kapacita kovu se zvýší o:

$$dQ = c \,.\, m \,.\, d\vartheta_k(t) \tag{12}$$

Podle zákona zachování energie se teplo předané kovu rovná změně jeho tepelné kapacity:

$$\alpha \,.\, S \,.\, (\vartheta_p(t) - \vartheta_k(t)) \,.\, dt = c \,.\, m.\, d\,\vartheta_k(t) \tag{13}$$

Po úpravě dostáváme:

$$\frac{c\,.m}{\alpha\,.S} \,.\, \frac{d\vartheta_k(t)}{dt} + \vartheta_k(t) = \vartheta_p(t) \tag{14}$$

$$T \,.\, \frac{d\vartheta_k(t)}{dt} + \vartheta_k(t) = \vartheta_p(t) \tag{15}$$

kde $T = \dfrac{c\,.m}{\alpha\,.S}$ je časová konstanta.

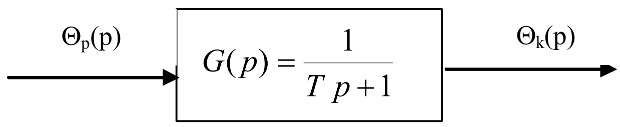
Rovnici (15) převedeme do Laplaceovy transformace a určíme přenos:

$$T.\,p.\Theta_k(p) + \Theta_k(p) = \Theta_p(p) \tag{16}$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\Theta_k(p)}{\Theta_p(p)} = \frac{1}{T\,p+1} \tag{17}$$

Ohřev kovu v ohřívací peci je vyjádřen proporcionální soustavou 1. řádu.

Blokové schéma ohřevu kovu je znázorněno na obr. 8.



Obr. 8 Blokové schéma ohřevu kovu

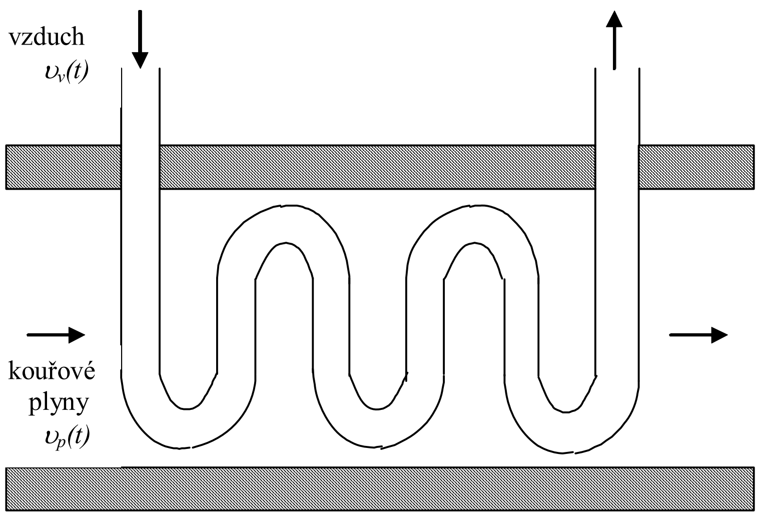
Řešený příklad

Zadání

Rekuperátor pro ohřev vzduchu

Sestavte diferenciální rovnici dynamického chování rekuperátoru pro ohřev vzduchu (obr. 9). Rekuperátor pracuje na principu předávání teploty jednoho média (kouřových plynů) médiu druhému (vzduch). Trubkou, která je obtékána kouřovými plyny o teplotě $\upsilon_p(t)$[K], prochází vzduch, který se ohřívá na teplotu $\upsilon_v(t)$[K]. Určete operátorový přenos rekuperátoru a nakreslete blokové schéma.

Řešení



Obr. 9 Rekuperátor pro ohřev vzduchu

Předpokládáme, že výměna tepla se uskutečňuje vedením, a to od kouřových plynů přes stěnu trubky se součinitelem přestupu tepla konvekcí α_1[W m^{-2} K^{-1}] a dále pak od trubky přes její vnitřní stěnu se součinitelem přestupu tepla α_2[W m^{-2} K^{-1}]. Dále předpokládáme, že rozdíl teplot na stěnách trubky je zanedbatelně malý (jedná se o tepelně tenké těleso, zanedbáváme přenos tepla vedením v trubce). V_t[m^3] je objem trubky rekuperátoru, ρ_t[kg m^{-3}] je hustota trubky, c_t[J kg^{-1} K^{-1}] je měrné teplo trubky, S_1[m^2] je vnější povrch trubky rekuperátoru obtékaný kouřovými plyny, V_v[m^3] je objem vzduchu, ρ_v[kg m^{-3}] je hustota vzduchu, c_t[J kg^{-1} K^{-1}] je měrné teplo vzduchu a S_2[m^2] je vnitřní povrch trubky rekuperátoru obtékaný vzduchem.

Množství tepla předané kouřovými plyny stěnám trubky rekuperátoru za čas dt je dáno Newtonovým zákonem:

$$dQ = \alpha_1 \,.\, S_1 \,.\, (\vartheta_p(t) - \vartheta_t(t)) \,.\, dt \tag{18}$$

Předané teplo se spotřebuje na změnu teploty trubky o $d\upsilon_t(t)$ a tepelná kapacita trubky se zvýší o hodnotu:

$$dQ = c_t \,.\, \rho_t \,.V_t .\, d\vartheta_t\,(t) \tag{19}$$

Podle zákona zachování energie se teplo předané trubce kouřovými plyny rovná změně tepelné kapacity trubky:

$$\alpha_1 \,.\, S_1 \,.\, (\vartheta_p(t) - \vartheta_t(t)) \,.\, dt = c_t \,.\, \rho_t \,.V_t .\, d\vartheta_t\,(t) \tag{20}$$

Tuto rovnici dále upravíme a dostaneme:

$$\frac{V_t \cdot \rho_t \cdot c_t}{\alpha_1 \cdot S_1} \,.\, \frac{d\vartheta_t(t)}{dt} + \vartheta_t(t) = \vartheta_p(t) \tag{21}$$

$$T_1 \,.\, \frac{d\vartheta_t(t)}{dt} + \vartheta_t(t) = \vartheta_p(t) \tag{22}$$

kde $T_1 = \dfrac{V_t \cdot \rho_t \cdot c_t}{\alpha_1 \cdot S_1}$ je časová konstanta.

Rovnici (22) převedeme do Laplaceovy transformace a určíme dílčí přenos kouřové plyny - trubka:

$$T_1 .\, p \,.\Theta_t(p) + \Theta_t(p) = \Theta_p(p) \tag{23}$$

$$G_1(p) = \frac{\Theta_t(p)}{\Theta_p(p)} = \frac{1}{T_1\, p + 1} \tag{24}$$

Množství tepla předané stěnou trubky rekuperátoru vzduchu za čas dt je dáno Newtonovým zákonem:

$$dQ = \alpha_2 \,.\, S_2 \,.\, (\vartheta_t(t) - \vartheta_v(t)) \,.\, dt \tag{25}$$

Předané teplo se spotřebuje na změnu teploty vzduchu o $d\vartheta_v(t)$ a tepelná kapacita vzduchu se zvýší o hodnotu:

$$dQ = c_v \,.\, \rho_v \,.V_v .\, d\vartheta_v(t) \tag{26}$$

Podle zákona zachování energie se teplo předané stěnou trubky rekuperátoru vzduchu rovná změně tepelné kapacity vzduchu:

$$\alpha_2 \,.\, S_2 \,.\, (\vartheta_t(t) - \vartheta_v(t)) \,.\, dt = c_v \,.\, \rho_v \,.V_v .\, d\vartheta_v(t) \tag{27}$$

Tuto rovnici dále upravíme a dostaneme:

$$\frac{V_v \cdot \rho_v \cdot c_v}{\alpha_2 \cdot S_2} \,.\, \frac{d\vartheta_v(t)}{dt} + \vartheta_v(t) = \vartheta_t(t) \tag{28}$$

$$T_2 \,.\, \frac{d\vartheta_v(t)}{dt} + \vartheta_v(t) = \vartheta_t(t) \tag{29}$$

kde $T_2 = \dfrac{V_v \cdot \rho_v \cdot c_v}{\alpha_2 \cdot S_2}$ je časová konstanta.

Rovnici (29) převedeme do Laplaceovy transformace a určíme dílčí přenos trubka - vzduch:

$$T_2 . p . \Theta_v(p) + \Theta_v(p) = \Theta_t(p) \tag{30}$$

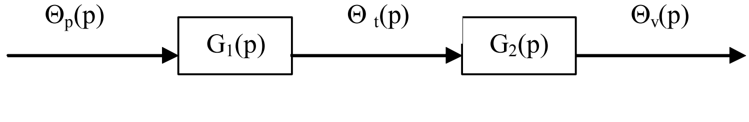
$$G_2(p) = \frac{\Theta_v(p)}{\Theta_t(p)} = \frac{1}{T_2\, p + 1} \tag{31}$$

Výsledný přenos celého rekuperátoru je dán součinem dílčích přenosů:

$$G(p) = \frac{\Theta_v(p)}{\Theta_p(p)} = G_1(p) \cdot G_2(p) = \frac{1}{(T_1\, p + 1).(T_2\, p + 1)} \tag{32}$$

Rekuperátor se chová jako nekmitavá proporcionální soustava 2. řádu.

Blokové schéma rekuperátoru je znázorněno na obr. 10.



Obr. 10 Blokové schéma rekuperátoru

Řešený příklad

Zadání

- **Pérování automobilu**

Určete, jak velké stlačení na nápravu vytvoří síla působící na karoserii automobilu. Sestavte operátorový přenos pérování automobilu a nakreslete blokové schéma. Vztah popisující výchylku polohy karoserie *x(t)*[m] v závislosti na působící síle *F*[N] je ve tvaru lineární diferenciální rovnice 2. řádu:

Řešení

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}+b\frac{d\,x(t)}{dt}+k\,x(t)=F(t) \qquad (33)$$

kde m[kg] je hmotnost automobilu, b [N s m^{-1}] je koeficient tlumení a k [N m^{-1}] je tuhost pružiny.

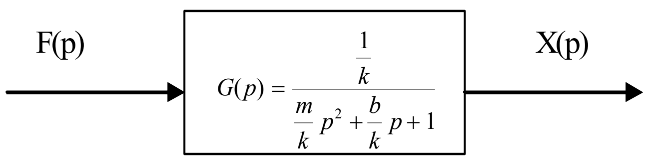
Laplaceovou transformací vztahu (33) získáme vztah:

$$m{\cdot}p^2{\cdot}X(p)+b{\cdot}p{\cdot}X(p)+k{\cdot}X(p)=F(p) \qquad (34)$$

Přenos soustavy má tedy tvar:

$$G(p)=\frac{X(p)}{F(p)}=\frac{1}{m\,p^2+b\,p+k}=\frac{\frac{1}{k}}{\frac{m}{k}p^2+\frac{b}{k}p+1} \qquad (35)$$

Jedná se o přenos kmitavého proporcionálního členu se setrvačností druhého řádu.



Obr. 11 Blokové schéma pérování automobilu

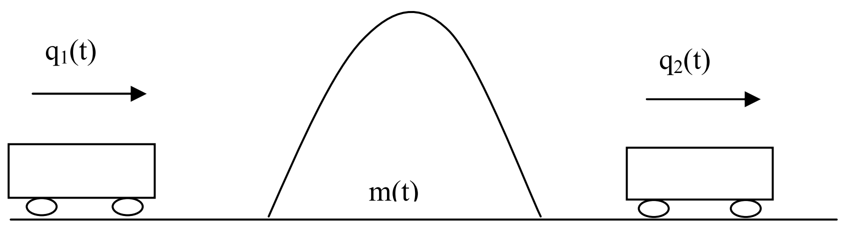
Řešený příklad

Zadání

- **Hromadění materiálu na skládce**

Na obr. 12 je zobrazen proces hromadění materiálu na skládce, kde *m(t)*[kg] je celkové množství materiálu na skládce, $q_1(t)$, resp. $q_2(t)$[kg. s-1] je hmotnostní množství dovážené, resp. odvážené. Poveďte analytickou identifikaci hromadění materiálu na skládce.

Řešení



Obr. 12. Proces hromadění materiálu na skládce

Pro elementární přírůstek množství materiálu na skládce *dm(t)* za elementární časový přírůstek *dt* platí bilanční rovnice:

$$dm(t) = q_1(t)dt - q_2(t)dt \tag{36}$$

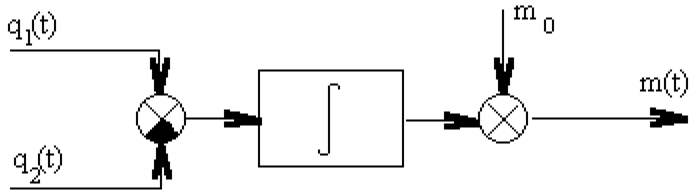
ze které po úpravě dostaneme lineární diferenciální rovnici 1.řádu:

$$\frac{dm(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t). \tag{37}$$

Množství materiálu na skládce nemůže být záporné, tj. $m(t) \geq 0$. Na skládce v čase $t=0$ bylo určité počáteční množství $m(0) = m_0 \geq 0$. Integrací vztahu při uvažování počáteční podmínky m_0 získáme ekvivalentní vyjádření procesu hromadění materiálu na skládce.

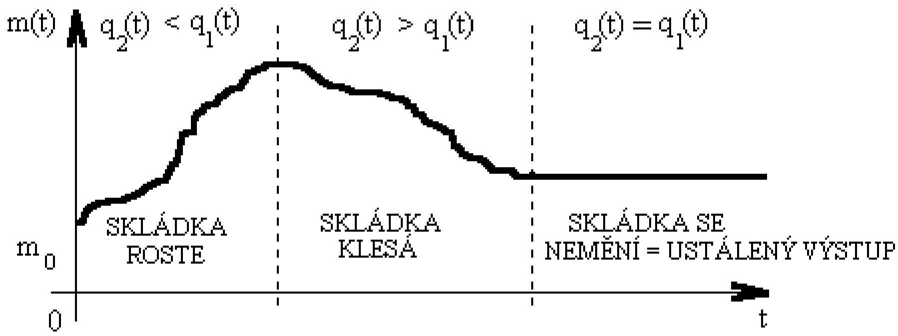
$$m(t) = \int_0^t [q_1(t) - q_2(t)]dt + m_0. \tag{38}$$

Z tohoto vztahu vyplývá integrační (akumulační) charakter procesu hromadění materiálu (obr. 12).



Obr. 13 Blokově schéma procesu hromadění materiálu na skládce v časové oblasti

Na základě vztahu (38) lze snadno analyzovat vlastnosti procesu hromadění materiálu (obr. 14):



Obr. 14 Časový průběh procesu hromadění materiálu na skládce

Ze vztahů (37) a (38) i z obr. 14 plyne, že ustálený výstup procesu hromadění materiálu nastává při libovolném množství materiálu na skládce m_u v případě, když $q_1(t) = q_2(t)$. Bude-li navíc $q_{u1} = q_{u2} = konst$, pak vzniká ustálený stav celého procesu hromadění materiálu. Je tedy zřejmé, že závislost mezi množstvím materiálu na skládce m_u (výstupem) a dováženým q_{u1}a odváženým q_{u2} množstvím (vstupy) v ustáleném stavu neexistuje.

Laplaceovou transformací vztahu (37) získáme vztah:

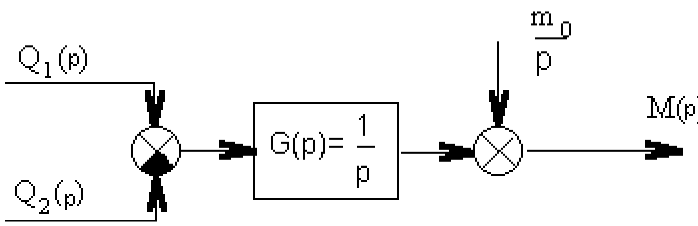
$$M(p) = \frac{1}{p}\left[Q_1(p) - Q_2(p)\right] + \frac{m_0}{p} \tag{39}$$

Pro nulovou počáteční podmínku $m_0 = 0$ pak platí:

$$M(p) = \frac{1}{p}\left[Q_1(p) - Q_2(p)\right] \tag{40}$$

a operátorový přenos pak má tvar:

$$G(p) = \frac{M(p)}{Q_1(p) - Q_2(p)} = \frac{1}{p} \tag{41}$$



Obr. 15 Blokové schéma hromadění materiálu na skládce v oblasti komplexní proměnné

Řešený příklad

Zadání

- **Nádrž s volným odtokem kapaliny**

Sestavte diferenciální rovnici dynamického chování kapaliny v otevřené nádobě podle obr. 16. Do nádoby přitéká průtočný objem kapaliny $q_1(t)$ [$m^3.s^{-1}$] a z nádoby volně odtéká průtočný objem $q_2(t)$ [$m^3.s^{-1}$] otvorem ve dně nádrže vlivem zemské tíže. Hladina kapaliny má konstantní plochu P[m^2], $h(t)$[m] je výška hladiny. Určete, jak se bude měnit v čase výška hladiny $h(t)$, sestavte operátorový přenos a nakreslete blokové schéma.

Řešení

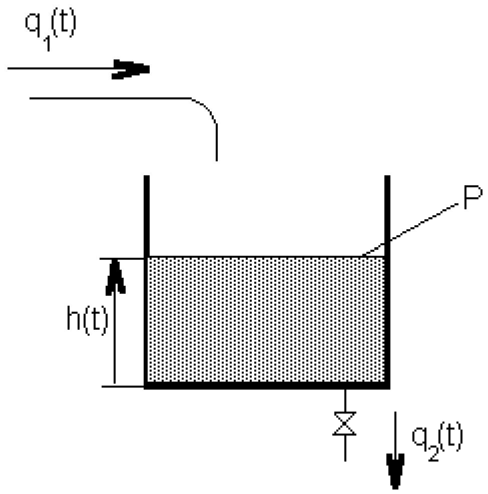
Pro objemový tok $q_2(t)$ platí následující vztah :

$$q_2(t) = a.\sqrt{h(t)}\,, \tag{42}$$

kde a [$m^{5/2}s^{-1}$] je konstantní koeficient průtoku.

Pro elementární přírůstek objemu kapaliny v nádrži $Pdh(t)$ za elementární časový přírůstek dt platí bilanční rovnice:

$$P.dh(t) = q_1(t).dt - q_2(t).dt\,, \tag{43}$$



Obr. 16 Schéma nádrže s volným odtokem

resp. po dosazení vztahu (38):

$$P.dh(t) = q_1(t).dt - a.\sqrt{h(t).dt} \ . \tag{44}$$

Po úpravě dostaneme nelineární diferenciální rovnici 1. řádu:

$$P.\frac{dh(t)}{dt} + a.\sqrt{h(t)} = q_1(t) \tag{45}$$

s počáteční podmínkou $h(0) = h_0$. Je zřejmé, že nenulovou počáteční podmínku mohl způsobit pouze nenulový přítok $q_1(t)$ pro $t < 0$. Pokud přítok $q_1(t) = 0$ pro $t < 0$, pak rovněž $h_0 = 0$.

V ustáleném stavu vymizí všechny změny v čase, tzn.

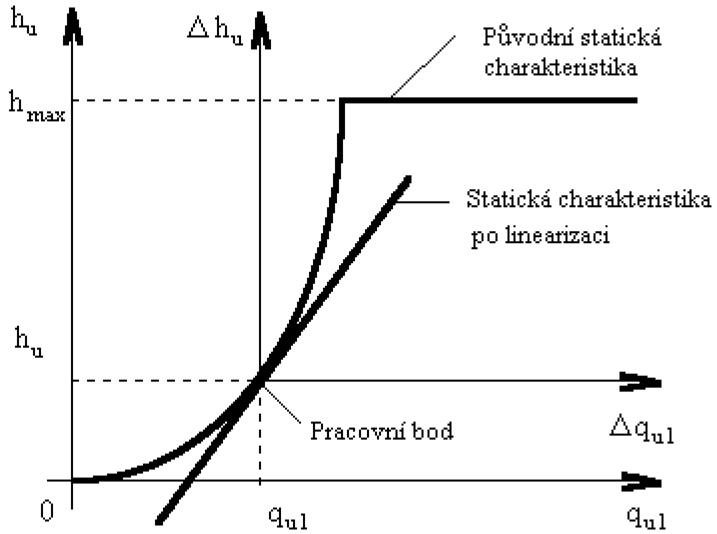
$$t \to \infty \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dh(t)}{dt} \to 0 \\ h(t) \to h_u \\ q_1(t) \to q_{u1} \end{cases} , \tag{46}$$

a proto na základě vztahu (45) při uvažování vztahu (46) dostaneme

$$h_u = \frac{1}{a^2}.q_{u1}^2 \ . \tag{47}$$

Vztah (43) vyjadřuje závislost mezi výškou hladiny h_u a přítokem q_{u1} v ustáleném stavu. Je to statická charakteristika, která je definována pouze v 1. kvadrantu, protože platí fyzikální omezení výšky hladiny (obr. 17).

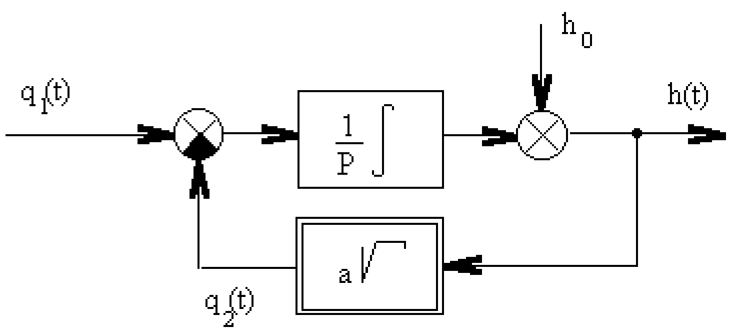
$$0 \le h(t) \le h_{\max} , \tag{48}$$



kde h_{max} je maximální výška hladiny daná konstrukcí nádrže.

Obr. 17 Statická charakteristika nádrže s volným odtokem

Blokové schéma nádrže s volným odtokem, které odpovídá diferenciální rovnici (45) je znázorněno na obr. 18.



Obr. 18 Blokové schéma nádrže s volným odtokem v časové oblastí

V regulační technice se často používá linearizace nelineárního matematického modelu, protože u lineárních modelů můžeme použít Laplaceovu transformaci a celé řady jiných metod, které neplatí pro nelineární modely. Použijeme přírůstkové proměnné vyjadřující přírůstky od zvolených ustálených hodnot, které nám určují pracovní bod soustavy (obr.17):

$$\begin{aligned} h(t) &= h_u + \Delta h(t) \Rightarrow \Delta h(t) = h(t) - h_u \\ q_1(t) &= q_{u1} + \Delta q_1(t) \Rightarrow \Delta q_1(t) = q_1(t) - q_{u1} \end{aligned} \tag{49}$$

Po dosazení vztahů (49) do nelineární diferenciální rovnice (45) obdržíme rovnici

$$P.\frac{d\Delta h(t)}{dt} + a.\sqrt{h_u + \Delta h(t)} = q_{u1} + \Delta q_1(t). \tag{50}$$

Následně použijeme linearizaci pomocí Taylorova rozvoje

$$P.\frac{d\Delta h(t)}{dt}+\frac{a}{2.\sqrt{h_u}}.\Delta h(t)=\Delta q_1(t) \tag{51}$$

a po jeho jednoduché úpravě obdržíme lineární diferenciální rovnici 1.řádu

$$T_1.\frac{d\Delta h(t)}{dt}+\Delta h(t)=k_1.\Delta q_1(t)\ , \tag{52}$$

$$T_1=\frac{2.P.\sqrt{h_u}}{a}\ , \tag{53}$$

$$k_1=\frac{2.\sqrt{h_u}}{a}\ , \tag{54}$$

kde T_1 časová konstanta [s],

k_1 koeficient přenosu [$m^{-2}.s$].

Statickou charakteristiku v přírůstkových proměnných získáme snadno z diferenciální rovnice (52), protože platí

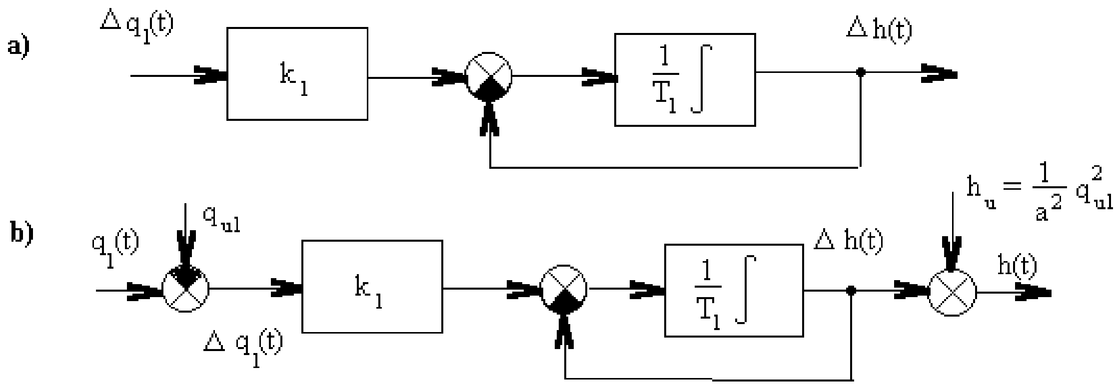
$$t\to\infty\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{d\Delta h(t)}{dt}\to 0\\ \Delta h(t)\to\Delta h_u\\ \Delta q_1(t)\to\Delta q_{u1}\end{cases}\ , \tag{55}$$

a tedy

$$\Delta h_u=k_1.\Delta q_{u1}\ . \tag{56}$$

Z posledního vztahu je patrné, že koeficient přenosu k_1 vyjadřuje směrnici (sklon) statické charakteristiky v přírůstkových souřadnicích.

Z diferenciální rovnice (52) vyplývá, že nádrž s volným odtokem po linearizaci má vlastnosti proporcionálního prvku se setrvačností 1. řádu. Při použití linearizovaného modelu si musíme uvědomit, že model platí pro malé odchylky od zvoleného pracovního bodu, jehož souřadnice jsou dány vztahem (47). Proto musíme uvážit, jestli budeme pracovat v přírůstkových proměnných, pak použijeme blokové schéma na obr. 19a, nebo v původních proměnných, kdy použijeme blokové schéma na obr.19b.



Obr. 19 Blokové schéma nádrže s volným odtokem v časové oblasti po linearizaci pro: přírůstkové proměnné - (a), původní proměnné - (b)

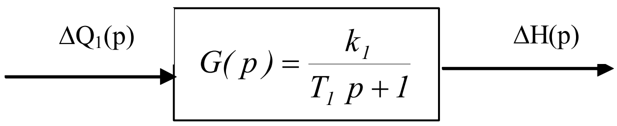
Použitím Laplaceovy transformace (při nulové počáteční podmínce) na diferenciální rovnici (48) a po úpravě dostaneme vztah:

$$\Delta H(p) = \frac{k_1}{T_1.p+1}.\Delta Q_1(p) \ , \qquad (57)$$

kde $\Delta H(p), \Delta Q_1(p)$ jsou Laplaceovy obrazy proměnných $\Delta h(t), \Delta q_1(t)$.

V regulační technice vztah (57) zapisujeme pomocí přenosu:

$$G(p) = \frac{\Delta H(p)}{\Delta Q_1(p)} = \frac{k_1}{T_1.p+1} \ . \qquad (58)$$



Obr. 20 Blokové schéma nádrže s volným odtokem v oblasti komplexní proměnné po linearizaci

Σ Shrnutí pojmů

Linearizace a metody linearizace, postup při tvorbě analytického modelu, jednoduché analytické modely technických systémů.

Otázky

1. Vyjmenujte fáze tvorby matematického modelu analytickou identifikací.
2. Které fyzikální zákony jsou nejčastěji používány při analytické identifikaci.
3. Co znamená linearizace a jaké metody linearizace užíváme při identifikaci systémů.

2.6. Experimentální metody identifikace

Čas ke studiu: 3 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat experimentální identifikace, metody experimentální identifikace, druhy modelů experimentální identifikace
- popsat druhy signálů užívané při experimentální identifikaci, popsat adaptivní a neadaptivní identifikaci, volbu metody identifikace
- klasifikovat metody identifikace.

Výklad

Experimentální identifikace využívá informace získané o vyšetřovaném objektu v průběhu jeho pozorování v normálním provozu nebo při vhodně zvoleném experimentu. Rozborem průběhů vstupních a výstupních veličin objektu získáváme matematický model vyjadřující vnější popis systému (tzv. černá skříňka – black box). Model vyjadřuje vstupně-výstupní chování objektu, avšak neumožňuje pohled do jeho vnitřní struktury. Souvislost mezi parametry modelu a konstrukčními parametry objektu není z tohoto modelu zřejmá. Při použití většiny metod experimentální identifikace postupujeme obvykle tak, že pro apriori známou anebo jiným způsobem předpokládanou strukturu modelu (tj. strukturu matematického vyjádření závislosti mezi sledovanými veličinami) se provede na základě pozorování vstupů a výstupů objektu odhad neznámých parametrů této struktury. Do experimentální identifikace, jestliže je správně provedená, můžeme zahrnout řadu závažných faktorů, které nemůžeme aplikovat při tvorbě modelu analytickým způsobem (na vyšetřovaný objekt často působí náhodné veličiny, měřené veličiny jsou ovlivněny náhodnými chybami tzv. šumem, případně vlastnosti objektu se mění předem neznámým způsobem). Je zřejmé, že většina technologických procesů v průmyslu vykazuje právě takové chování.

K nevýhodám experimentální identifikace patří ta skutečnost, že vyšetřovaný objekt musí být přístupný experimentu a sledované veličiny musí být měřitelné. Dále je nutno si uvědomit, že z vyšetřovaného modelu nemůžeme získat informace o vnitřní struktuře objektu.

Při tomto způsobu identifikace postupujeme obvykle tak, že pro vhodně zvolenou strukturu modelu provedeme odhad jeho parametrů ze záznamu odpovídající odezvy na vstupní signál za použití vhodné vyhodnocovací metody.

2.7. Rozdělení experimentálních identifikačních metod

V průběhu vývoje teorie identifikace a modelování byla navržena řada metod experimentální identifikace a další metody jsou stále publikovány. Z počáteční snahy o co nejjednodušší postup při experimentální identifikaci (např. vyhodnocování přechodových charakteristik pomocí tečny v inflexním bodě) se s rozvojem výpočetní techniky přechází na stále složitější metodiku výpočtu parametrů modelu. Různorodost identifikačních metod spočívá ve volbě vstupního testovacího signálu, volbě typu matematického modelu, v různých možnostech numerického řešení odhadu parametrů modelu a různých způsobech zpracování naměřených dat. Podle těchto hledisek je provedena následující klasifikace experimentálních identifikačních metod.

Podle druhu testovacího signálu:

Identifikovaný objekt budíme vstupním signálem a z pozorované reakce (odezvy) se snažíme analyzovat vlastnosti objektu. Vniknutí do podstaty vlastností a míra přesnosti jejich určení je v experimentu značně závislá na způsobu buzení objektu a výběru typu testovacího signálu.

Vstupní signály můžeme třídit z různých hledisek. Vstupní signály mohou být <u>přirozené (provozní) signály</u>, které se běžně vyskytují v provozu a působí na systém během jeho provozu (řídicí signály, provozní šumy apod.). Pokud tyto signály svými vlastnostmi neumožňují provést identifikační experiment (např. mají malou amplitudu, nevhodné frekvenční spektrum apod.), používají se <u>uměle vytvořené signály (testovací signály)</u>, které dovedeme:

- jednoduše opakovaně generovat,
- matematicky popsat,
- realizovat pomocí akčních členů (fyzikální realizovatelnost signálů),
- lze použít pro daný proces (systém je možné vybudit uvedeným signálem),
- dostatečně vybudí systém vzhledem k jeho dynamice.

Podle tohoto hlediska pak dělíme experimentální metody identifikace na:

- **pasivní metody** - k identifikaci využíváme vstupní signál existující v provozních podmínkách soustavy
- **aktivní metody** - na vstup soustavy přivádíme předem definované uměle vytvářené vstupní signály s určitými vlastnostmi (deterministické signály, šum, pseudonáhodné signály)

Signály dále dělíme podle jejich vlastností na:

- deterministické, jejichž průběhy v čase jsou známými funkcemi času, což znamená, že hodnoty takových signálů se mohou určit pro kterýkoliv časový okamžik, dovedeme je analyticky popsat. Tyto deterministické signály mohou být buď aperiodické (jednotkový skok, jednotkový skok rychlosti, jednotkový skok zrychlení, jednotkový impuls aj.) nebo periodické (sinusový průběh, sled pravoúhlých impulsů, sled lichoběžníkových impulsů, sled trojúhelníkových impulsů apod.)

- náhodné (stochastické), jejichž průběhy v čase jsou neznámé nebo náhodné funkce času, jejich každá realizace je jedinečná, náhodná, neopakovatelná, nedovedeme je analyticky popsat. Můžeme u nich určit jen statistické nebo pravděpodobnostní charakteristiky. Typickým představitelem stochastického signálu je bílý šum.

- pseudonáhodné, jejichž průběh v čase je známý, v rámci jedné periody mají charakter známé realizace náhodného procesu a tyto realizace se periodicky opakují.

Podle tohoto hlediska pak dělíme experimentální metody identifikace na:

- **deterministické metody (klasické) -** vycházejí z měření odezev na klasické determinované zkušební signály jako jsou neperiodické signály (např. skoková a impulsní funkce), periodické signály (sinusový, obdélníkový a lichoběžníkový průběh) a z jejich vyhodnocení klasickými vyhodnocovacími metodami. Podle typu vstupních signálů dělíme deterministické metody identifikace na metody vyhodnocení přechodových charakteristik (např. aproximace tečnou v inflexním bodě, metoda postupné integrace apod.), frekvenčních charakteristik a na metody, při kterých je vstupní signál ve tvaru obecné funkce času, splňuje však určité omezující předpoklady. Tyto metody jsou vhodné pro soustavy, které lze popsat deterministickými modely. Obvykle nevyžadují použití výpočetní techniky.
- **stochastické metody (statistické) -** vycházejí z měření odezev na náhodné resp. pseudonáhodné zkušební signály a z jejich vyhodnocení statistickými vyhodnocovacími metodami za použití výpočetní techniky. Tyto metody jsou složitější. Jedná se o metody, kdy parametry jsou odhadovány z podmínky, aby vhodné kritérium odvozené od průběhu výstupu reálné soustavy a modelu nabývalo extrému. Z matematického hlediska vede proces experimentální identifikace na řešení úlohy optimalizace parametrů. Hlavním matematickým aparátem potřebným k řešení této úlohy je teorie pravděpodobnosti, matematická statistika a teorie náhodných procesů (metoda

korelační analýzy, metoda nejmenších čtverců, zobecněná metoda nejmenších čtverců atd.). Tyto metody jsou vhodné pro identifikaci deterministických soustav i soustav charakterizovaných složkou šumového signálu působícího na jejich výstupu. Jejich matematický popis vede na formulaci stochastických modelů.

Zmíníme se stručně o výhodách a nevýhodách některých identifikačních metod vzhledem k použitému vstupnímu signálu. Mezi nejčastější metody používající aperiodický vstupní signál patří vyhodnocování přechodových a impulsních charakteristik. Výhoda těchto metod spočívá v relativně krátké době měření odezev a v jejich poměrně jednoduchém vyhodnocování. Periodické deterministické signály se používají při proměřování frekvenčních charakteristik objektů. Vyžadují poměrně dlouhou dobu měření, protože měření se musí opakovat pro různé frekvence signálu. Výhodou identifikace pomocí deterministických signálů je reprodukovatelnost experimentu.

Metody sloužící k vyhodnocování odezev na náhodné a pseudonáhodné signály jsou vhodné zejména pro identifikaci stochastických objektů, ale lze je také použít i u soustav deterministických. Tyto metody jsou založeny na statistickém vyhodnocování naměřených hodnot, a proto vyžadují poměrně dlouhou dobu měření, což platí zejména pro vyhodnocování odezev na náhodné signály. Použití pseudonáhodných signálů je výhodnější, než signálů náhodných, protože pseudonáhodné signály mají přesně dané vlastnosti v omezeném časovém úseku a umožňují reprodukovat experiment.

Při výběru testovacích signálů musíme vzít v úvahu nejen dynamiku a typ vyšetřovaného systému ale i hledisko praktické realizovatelnosti. Celá řada testovacích signálů má pouze teoretický charakter a prakticky je můžeme realizovat jen s větším nebo menším stupněm přiblížení. Při volbě testovacího signálu pro identifikaci reálného objektu jsme omezováni možností výběru jen z určitých tříd signálů, které jsou pro objekt přípustné (z bezpečnostních a technologických důvodů) a technicky (přístrojově) realizovatelné. Svůj vliv zde sehrávají i náhodné poruchy a ekonomika experimentu.

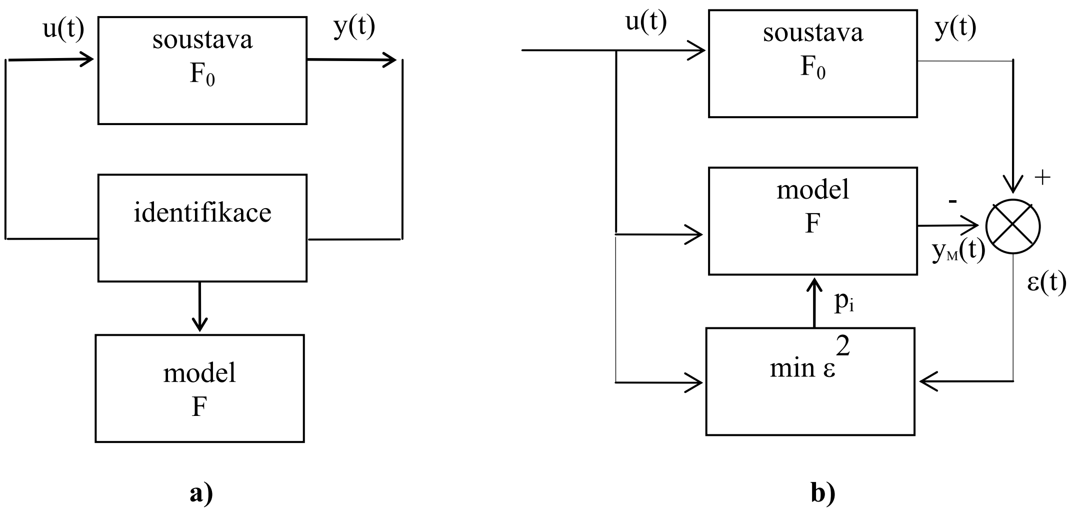
Podle způsobu zpracování výsledků experimentu:

Výsledkem experimentálního měření jsou buď spojité záznamy vstupních signálů a jim odpovídajících odezev nebo diskrétní hodnoty těchto signálů měřené v ekvidistantních časových intervalech. Metody experimentální identifikace můžeme proto rozdělit podle toho, zda se při nich zpracovávají spojité nebo diskrétní signály.

Dalším hlediskem pro rozdělení metod podle způsobu zpracování naměřených hodnot je dělení na metody:

- **neadaptivní (explicitní** nebo též metody **otevřené smyčky** vzhledem k parametrům**, off-line** metody**, jednorázové** metody**) –** zpracovávají všechna data najednou po ukončeném měření (obr. 21a). Všechny výsledky měření je nutné až do vyhodnocení uchovávat.

- **adaptivní (implicitní** nebo též metody **uzavřené smyčky** vzhledem k parametrům, **on-line** metody, **průběžné** metody) – zpracovávají data postupně tak, jak byly v časovém sledu naměřeny. Z několika málo diskrétních hodnot nebo z krátkého časového intervalu při zpracování spojitých signálů se vytvoří model, který se dalšími změřenými hodnotami neustále zpřesňuje podle okamžitého stavu identifikovaného objektu v závislosti na čase. (obr. 21b). Při tomto způsobu identifikace není třeba všechna naměřená data uchovávat.



Obr. 21 Neadaptivní (a) a adaptivní identifikace (b)

Podle druhu modelu:

Volba druhu modelu je jedním z hlavních měřítek při klasifikaci identifikačních metod, protože ke zvolenému modelu často přísluší i určitý druh vstupního signálu, kritéria kvality identifikace a identifikačního algoritmu.

Model by měl splňovat tyto požadavky: dokonale popisovat dynamické vlastnosti objektu, umožňovat relativně jednoduché matematické řešení při vyhodnocování naměřených dat, odpovídat tvaru požadovanému pro další využití a popisovat nebo vylučovat vliv rušivých signálů, které působí na identifikovaný objekt.

Obecně můžeme modely rozdělit na parametrické (se strukturou), neparametrické (bez struktury). Parametrický model stejného druhu (např. diferenciální rovnice) mění tedy pro různé druhy identifikovaných objektů svoji strukturu. U metod pracujících s parametrickými modely je nutné strukturu modelu buď předem znát (např. řád diferenciální rovnice) nebo ji současně s parametry modelu odhadnout. U neparametrických metod jsou výsledky identifikačního experimentu ve formě tabulky nebo grafu (např. body přechodové charakteristiky apod.). Neparametrické modely nemůžeme přímo použít pro řízení, protože většina řídicích strategií je založena na znalosti parametrů modelu.

Proto musíme pro účely řízení neparametrické modely vhodným způsobem parametrizovat (např. aproximovat přechodovou charakteristiku apod).

Podle následujících konkrétních tvarů parametrických modelů (viz. podrobněji kap. 3) rozdělujeme metody identifikace vedoucí na následující nejčastěji používané typy modelů:

- model ve tvaru diferenciální rovnice nebo operátorového přenosu v Laplaceově transformaci popisuje závislost mezi spojitými vstupními a výstupními signály objektu. Protože většina identifikovaných objektů je spojitá, odpovídá často tento tvar modelu analytickým modelům, takže koeficienty modelu představují fyzikální parametry objektu. Na matematickém popisu soustav pomocí diferenciálních rovnic je založena klasická teorie automatické regulace (např. návrh parametrů regulátorů, vyšetřování stability regulačního obvodu apod.). Do této skupiny metod patří především jednoduché metody identifikace, jakými jsou např. aproximace přechodových charakteristik, metoda postupné integrace, vyhodnocování impulsních charakteristik apod., vhodné pro identifikaci deterministických objektů.

- model ve tvaru diferenční rovnice nebo diskrétního přenosu v Z transformaci popisuje závislost mezi diskrétními hodnotami vstupních a výstupních veličin objektu. Převodem spojitých veličin na diskrétní přechází matematický popis z diferenciální rovnice na rovnice diferenční. Derivace jsou v diferenční rovnici nahrazeny diskrétními hodnotami časové funkce posunutými v čase, což přináší podstatné zjednodušení numerického řešení odhadu parametrů. Tento způsob popisu modelů navazuje na teorii číslicového řízení. Model ve tvaru diferenční rovnice se obvykle používá u statistických a pravděpodobnostních metod odhadu parametrů, kdy výpočet je natolik složitý, že se neobejde bez výpočetní techniky.

- model ve tvaru frekvenční charakteristiky - frekvenční charakteristika popisuje chování objektu při různých frekvencích a sice pomocí absolutní hodnoty poměru výstupního a vstupního harmonického signálu a pomocí jejich fázového posuvu. Klasický způsob proměřování objektů poruchovým signálem s proměnlivou frekvencí je pro některý druh fyzikálních veličin běžný (např. pro napětí), pro jiné fyzikální veličiny je však technicky nerealizovatelný (např. nelze dobře vytvořit sinusové změny složení látek). Frekvenční charakteristiku je možno získat rovněž Fourierovou analýzou odezvy na jednodušší periodické signály (obdélníkové, lichoběžníkové) nebo výpočtem s použitím výkonové spektrální hustoty. Nevýhodou modelu ve tvaru frekvenční charakteristiky je, že se obtížně převádí na jiný typ modelu, vhodnější pro další využití.

Dalším typem modelů jsou modely ve tvaru stavových rovnic, které se dají snadno přepsat z diferenciální rovnice (u spojitých modelů) resp. z diferenční rovnice (u diskrétních modelů).

2.8. Volba identifikační metody

Výběr identifikační metody zahrnuje volbu testovacího signálu, zvolení identifikovaného matematického modelu, stanovení postupu vyhodnocení naměřených dat a způsobu verifikace získaného modelu. Správnost provedených rozhodnutí závisí na dostupných apriorních informacích o identifikovaném procesu, podmínkách identifikace a předešlých zkušenostech. Použitá identifikační metoda musí umožnit vyšetření dynamických vlastností daného systému při působení daného poruchového signálu během omezené (konečné) doby měření, při použití přípustného testovacího signálu a přípustné změny výstupu. Na základě posouzení uvedených hledisek se rozhodneme pro použití jednotlivých metod identifikace.

Identifikaci systému pomocí měření odezev systému na deterministické testovací signály a následné vyhodnocení získaných neparametrických charakteristik použijeme, pokud na systém působí poruchové signály, jejichž úroveň je malá vzhledem k úrovni testovacího signálu a jejichž vliv lze eliminovat např. pomocí filtrace. Je-li úroveň poruchových signálů vyšší vzhledem k testovacímu signálu, je vhodné použít stochastické metody identifikace. Typ vstupního signálu je nutné zvolit s ohledem na jeho realizovatelnost a možnost vybuzení systému.

Σ Shrnutí pojmů

Experimentální identifikace, metody experimentální identifikace, druhy modelů experimentální identifikace, druhy signálů užívané při experimentální identifikaci, adaptivní a neadaptivní identifikace, volba metody identifikace, klasifikace metod identifikace.

? Otázky

1. Co znamená experimentální identifikace.
2. Co to je black box a srovnejte jej s white boxem.
3. Jaké známe metody experimentální identifikace
4. Jaké druhy modelů užíváme nejčastěji při experimentální identifikaci.
5. Jaké vstupní signály užíváme při experimentální identifikaci.
6. Co nazýváme adaptivní a neadaptivní identifikací.

3. DETERMINISTICKÉ METODY IDENTIFIKACE

Čas ke studiu: 0,5 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat způsoby vyjádření matematického popisu spojitých soustav.

Výklad

Jedná se o experimentální metody identifikace, při kterých neuvažujeme působení náhodných veličin na objektech ani nepřesnosti měření. Deterministické metody jsou jednoduché a názorné. Je-li měření na objektu provedeno pečlivě, dostaneme dobré výsledky. Hodí se především pro jednoparametrové soustavy. Pro víceparametrové soustavy se hodí tehdy, můžeme-li hodnoty nesledovaných veličin zanedbat nebo jejich vliv vyloučit (udržováním na konstantní hodnotě).

3.1. Vyjádření matematického popisu spojitých lineárních soustav

Tato kapitola uvádí nejdůležitější tvary lineárních matematických modelů a třídění základních dynamických členů. Jsou zde uvažovány spojité lineární stacionární dynamické soustavy, tj. takové, jejichž vlastnosti se v čase nemění. Jejich matematické modely mohou mít různé tvary a mohou popisovat jejich vlastnosti v různých oblastech (prostorech). Proto je třeba vždy vybrat takový matematický model, který pro daný účel bude nejvhodnější. V teorii lineární regulace se nejčastěji pracuje s matematickými modely v níže uvedených tvarech, ze kterých lze určit všechny důležité dynamické i statické vlastnosti uvažovaných lineárních soustav.

Jednou z nejdůležitějších vlastností je **fyzikální realizovatelnost**, která spočívá v tom, že daný matematický model může popisovat (reprezentovat) nějaký skutečný lineární dynamický člen. Podmínka fyzikální realizovatelnosti v podstatě vyjadřuje princip příčinnosti (kauzality), který znamená, že následek (reakce, výstup) je vyvolán vždy příčinou (akcí, vstupem). Prakticky to znamená, že odezva dynamického členu nemůže vzniknout před okamžikem změny vstupní veličiny.

Základní tvary matematických modelů lineárních stacionárních dynamických soustav (se soustředěnými parametry) jsou:

- **lineární diferenciální rovnice**
- **přenos v Laplaceově transformaci**
- **přechodová funkce (charakteristika)**
- **impulsní funkce (charakteristika)**
- **frekvenční funkce (charakteristika)**
- **frekvenční přenos**
- **odezva systému na libovolný vstupní signál**
- **stavové rovnice.**

Shrnutí pojmů

Způsoby vyjádření matematického popisu spojitých soustav.

Otázky

1. Jaké užíváme způsoby vyjádření identifikovaného modelu při deterministické identifikaci.
2. Co nazýváme deterministickou identifikací.

3.2. Vstupní signály užívané v deterministické identifikaci

Čas ke studiu: 1,5 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

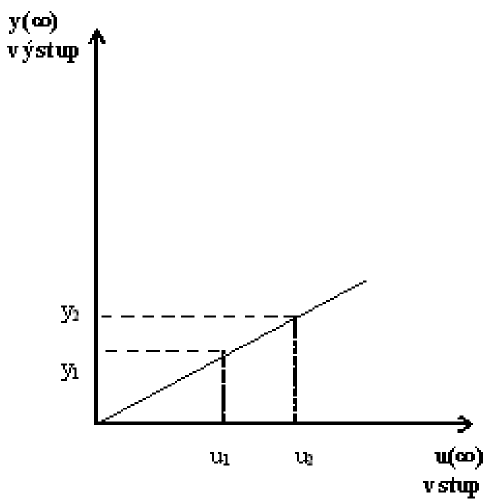
- definovat .statické a dynamické vlastnosti soustavy, statickou charakteristiku, vstupní neperiodické signály, výstupní signály při experimentální identifikaci
- klasifikovat vstupní signály při experimentální identifikaci.

Výklad

Vlastnosti jakéhokoliv systému můžeme pozorovat za různých podmínek:

- v ustáleném stavu - pak hovoříme o **statických vlastnostech**
- ve stavu neustáleném - pak hovoříme o **dynamických vlastnostech**

Statické vlastnosti soustavy v ustáleném stavu se dají vyjádřit **statickou charakteristikou,** která vyjadřuje závislost ustálených hodnot výstupní veličiny na ustálených hodnotách vstupní veličiny. U lineárních dynamických členů statická charakteristika, pokud existuje, je vždy přímka procházející počátkem souřadnic. Obecně však bývá tato závislost nelineární, pak provádíme její linearizaci v okolí pracovního bodu již dříve uvedenými metodami.



Obr. 22 Statická charakteristika

Nejednodušším způsobem zjišťování této závislosti u dynamických soustav je metoda určování bod po bodu. Postupně nastavujeme hodnoty vstupní veličiny a měříme odpovídající hodnoty výstupní veličiny. Přitom dbáme, aby se neuplatnila dynamika systému. To zajistíme odečítáním výstupní veličiny až po určité době od změny vstupní veličiny, tj. až se soustava dostane do ustáleného stavu.

V lineární diferenciální rovnici vyjadřuje tuto závislost poslední člen rovnice, protože v ustáleném stavu vymizí všechny změny v čase (derivace):

$$a_0\, y(t) = b_0\, u(t) \tag{59}$$

pro $t \rightarrow \infty$ (takto vyjadřujeme ustálený stav; pro různé systémy je čas potřebný k dosažení ustáleného stavu různý : 1 min, 1 h , atd.)

$$k = \frac{b_0}{a_0} = \frac{y(\infty)}{u(\infty)} \tag{60}$$

Člen a_0 popisuje statické vlastnosti soustavy. Statickou charakteristikou pak bude přímka:

$$y(\infty) = k\, u(\infty) \tag{61}$$

Směrnice přímky bude:

$$tg\, \alpha = k = \frac{b_0}{a_0} \tag{62}$$

Na základě rovnice (61) můžeme dopředu určit, jaký bude výstup při daném vstupu v ustáleném stavu, ale rovnice nám nic neříká o tom, za jakou dobu tohoto výstupu dosáhneme. Nezískáme ještě úplný popis systému, nemůžeme jej ještě řídit.

Pro úplný popis systému musíme zjistit také dynamické vlastnosti systému, tedy závislost výstupní veličiny na čase. Pro určení dynamických vlastností soustav zavádíme na vstup soustavy předem definované signály. Tyto signály jsou buď neperiodické nebo periodické.

Mezi nejčastěji používané neperiodické vstupní signály patří:

- Heavisideův jednotkový skok $\eta(t)$,
- Diracův jednotkový impuls $\delta(t)$,
- jednotkový skok rychlosti $\xi(t)$ resp. $v(t)$,
- jednotkový skok zrychlení $a(t)$ (užívaný méně často)

Mezi nejčastěji používané periodické signály patří:

- sinusový průběh

- sled pravoúhlých impulsů
- sled lichoběžníkových impulsů
- sled trojúhelníkových impulsů

Definice neperiodických vstupních signálů

Heavisideův jednotkový skok $\eta(t)$

Je definován vztahy:

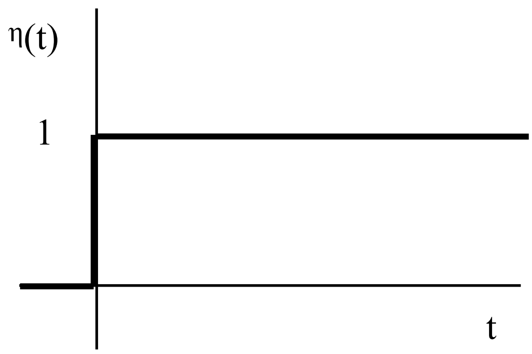
$\eta(t) = 1$ pro $t \geq 0$

$\eta(t) = 0$ pro $t < 0$

Laplaceovým obrazem $\eta(t)$ je:

$$L\{\eta(t)\} = \frac{1}{p} \tag{63}$$

Odezva na jednotkový Heavisideův skok je **přechodová funkce** $h(t)$. Jejím grafickým vyjádřením je **přechodová charakteristika**.



Obr. 23 Heavisideův jednotkový skok

Diracův jednotkový impuls $\delta(t)$

Představujme si, že vzniká z impulsu o výšce h a šířce b. Plochu impulsu si zvolíme jednotkovou a při současném zmenšování šířky (b → 0) zvětšujeme výšku (h → ∞) tak, aby stále platilo:

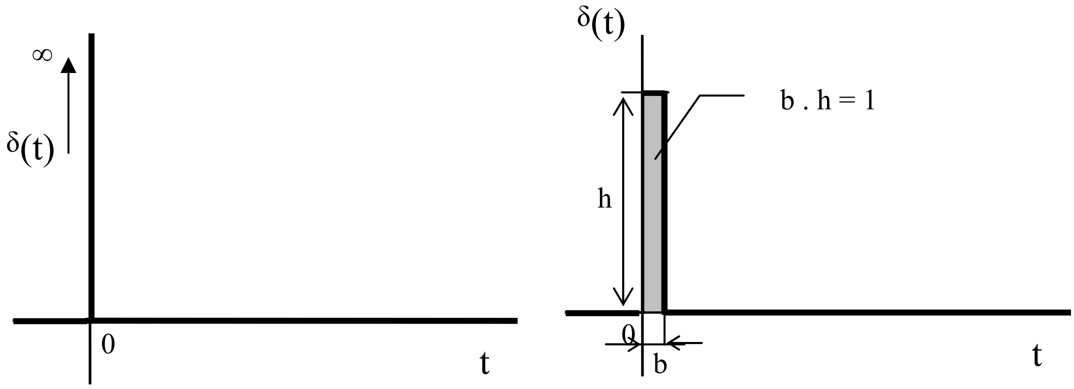
$$b \cdot h = 1 \tag{64}$$

Diracův impuls je idealizovaná funkce fyzikálně nerealizovatelná. Lze ji charakterizovat vztahy:

$\delta(t) = 0$ pro $t \neq 0$

$\delta(t) = \infty$ pro $t = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \tag{65}$$



Obr. 24 Diracův impuls

Laplaceovým obrazem $\delta(t)$ je

$$L\{\delta(t)\} = 1 \tag{66}$$

Odezvou systému na vstupní signál ve tvaru Diracova impulsu je **impulsní funkce** $g(t)$. Jejím grafickým vyjádřením je **impulsní charakteristika**.

Skok rychlosti $\xi(t)$

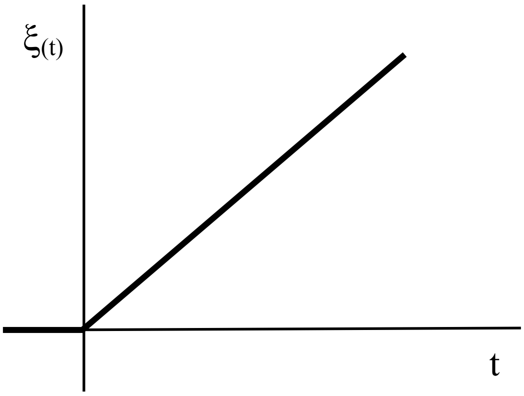
Je definován vztahy:

$\xi(t) = 0$ pro $t < 0$

$\xi(t) = t$ pro $t \geq 0$

Laplaceovým obrazem skoku rychlosti je:

$$L\{\xi(t)\} = \frac{1}{p^2} \tag{70}$$



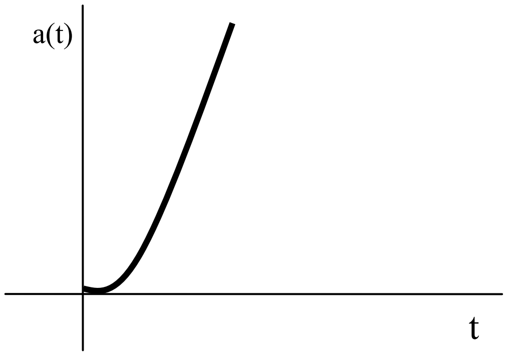
Obr. 25 Skok rychlosti

Skok zrychlení *a(t)*

Je definován vztahy:

$a(t) = 0$ pro $t < 0$

$a(t) = \frac{1}{2} t^2$ pro $t \geq 0$



Obr. 26 Skok zrychlení

Laplaceovým obrazem skoku zrychlení je

$$L\{a(t)\} = \frac{1}{p^3} \tag{71}$$

Vstupní funkce ve tvaru skoku rychlostí, jednotkového skoku a jednotkového impulsu si navzájem odpovídají podle vztahů:

$$\delta(t) = \eta'(t) = \xi''(t) \tag{67}$$

$$\eta(t) = \xi'(t) \tag{68}$$

Diracův impuls je derivací jednotkového skoku a druhou derivací skoku rychlosti; jednotkový skok je derivací skoku rychlosti.

Podobně lze hovořit i o vztahu mezi odezvami. Impulsní charakteristika *g(t)* je derivací přechodové charakteristiky *h(t)*:

$$g(t) = h'(t) \qquad (619)$$

Podobně je přechodová charakteristika derivací odezvy na skok rychlosti. Při praktické realizaci je nutno počítat s tím, že průběhy vstupních signálů nebudou ideální, ale dojde k jejich zkreslení.

CD-ROM_3 – Přechodová charakteristika (ANIMACE_3_A)

V rámci animace je možné se seznámit s přechodovou charakteristikou.

CD-ROM_4 – Impulsní charakteristika (ANIMACE_3_B)

V rámci animace je možné se seznámit s impulsní charakteristikou.

Shrnutí pojmů

Statické a dynamické vlastnosti soustavy, statická charakteristika, vstupní neperiodické signály – Heavisideův jednotkový skok, Diracův impuls, skok rychlosti, skok zrychlení, výstupní signály při experimentální identifikaci – přechodová charakteristika, impulsní charakteristika, klasifikace vstupních signálů při experimentální identifikaci.

Otázky

1. Kdy hovoříme o statických vlastnostech soustavy a kdy o dynamických vlastnostech soustavy.
2. Jaké znáte druhy vstupních signálů užívaných při experimentální identifikaci.
3. Charakterizujte Heavisideuv jednotkový skok a Diracův impuls.
4. Vysvětlete pojem statická charakteristika a jak změříme statickou charakteristiku systému.
5. Mezi jaké signály řadíme sinusový signál.

3.3. Popis lineární diferenciální rovnicí, přenosem v Laplaceově transformaci, polohou pólů a nul přenosu

Čas ke studiu: 2 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat tvar lineární diferenciální rovnice při experimentální identifikaci, obrazový přenos v L-transformaci , polohu pólů a nul soustavy
- popsat vlastnosti diferenciální rovnice, obrazového přenosu, polů a nul řešené soustavy
- řešit převod diferenciální rovnice na obrazový přenos v Laplaceově transformaci a obráceně, tzn, z obrazového přenosu v Laplaceově transformaci na diferenciální rovnici užití zpětné Laplaceovy transformace

Výklad

Obecný tvar popisu je:

$$a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = b_m \cdot u^{(m)}(t) + \ldots + b_0 \cdot u(t) \qquad (72)$$

kde a_i, b_i jsou konstantní koeficienty,

$u_{(t)}$ je vstup,

$y_{(t)}$ je výstup systému.

Z podmínky fyzikální realizovatelnosti plyne $m \leq n$.

Řád diferenciální rovnice n je roven řádu systému. Řešení rovnice je možno získat, známe-li počáteční podmínky $y^{(n-1)}(0) \ldots y(0)$ a $u^{(m-1)}(0) \ldots u(0)$ a tvar vstupního signálu.

Častou formou zápisu je:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t) \qquad (73)$$

V systému s dopravním zpožděním

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t - T_d) \qquad (74)$$

kde T_d je doba dopravního zpoždění.

Přenos systému *G(p)* je dán poměrem obrazu výstupní veličiny *Y(p)* k obrazu vstupní veličiny *U(p)* při nulových počátečních podmínkách. Použitím Laplaceovy transformace na lineární diferenciální rovnici (72) za předpokladu nulových počátečních podmínek dostáváme základní rovnici přenosu:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 b + \ldots + a_n p^n} \tag{75}$$

Rovnice se často upravuje na tvar:

$$G(p) = \frac{\frac{b_0}{a_0} + \frac{b_1}{a_0} b + \ldots + \frac{b_m}{a_0} p^m}{1 + \frac{a_1}{a_0} p + \ldots + \frac{a_n}{a_0} p^n} = \frac{\beta_0 + \beta_1 p + \ldots + \beta_m p^m}{1 + \alpha_1 p + \ldots + \alpha_n p^n} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \beta_i p^i}{1 + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p^i} \tag{76}$$

V praxi má popis soustavy často tvar:

$$G(p) = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{1 + \frac{a_1}{a_0} p + \ldots + \frac{a_n}{a_0} p^n} = \frac{k}{1 + T_1 p_1 + T_2^{\,2} p^2 + \ldots + T_n^{\,n} p^n} \tag{77}$$

kde k je zesílení soustavy,

T_i jsou časové konstanty.

Polynom ve jmenovateli přenosu se nazývá **charakteristický polynom.** Kořeny tohoto polynomu se nazývají **póly systému**:

$$a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot p + a_0 = a_n (p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_n) \tag{78}$$

kde p_i *(i=1,2.....n)* jsou póly systému.

Kořeny polynomu v čitateli přenosu jsou **nuly systému**. Čitatel lze psát:

$$b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \ldots + b_1 \cdot p + b_0 = b_m (p - n_1)(p - n_2) \ldots (p - n_m) \tag{79}$$

n_i *(i=1,2...m)* jsou nuly systému.

Póly i nuly mohou být buď reálné, komplexně sdružené nebo ryze imaginární. Záporně vzaté převrácené hodnoty reálných pólů a nul jsou časové konstanty.

$$T_i = -\frac{1}{p_i} \qquad T_i' = -\frac{1}{n_i} \tag{80}$$

Pak lze přenos psát:

$$G(p)=\frac{b_m}{a_n}\frac{(1+pT_1')(1+pT_2')...+(1+pT_m')}{(1+pT_1)(1+pT_2)...+(1+pT_n)} \tag{81}$$

Na základě znalosti polohy pólů a nul přenosu v komplexní rovině, lze určit vnější chování soustav. Rozložení pólů a nul v komplexní rovině určuje dynamické vlastnosti soustav. U pólů a nul je rozhodující jejich poloha vzhledem k imaginární ose. Záporné reálné póly ($p_i=-\alpha_i, \alpha_i>0$) vyvolávají **aperiodický přechodový jev**. Komplexně sdružené póly ($p_i=-\alpha_i \pm j\omega_i, \alpha_i>0$) způsobují **kmitavý charakter přechodového děje**. Nuly v počátku komplexní roviny představují derivační charakter systému, póly v počátku naopak představují integrační charakter.

Další podrobnosti viz odstavec 3.4. Rozdělení základních lineárních dynamických soustav.

Řešený příklad

Zadání

Stanovte přenos systému popsaného diferenciální rovnicí

$$y'''(t)+7\cdot y''(t)+16\cdot y'(t)+12\cdot y(t)=u'(t)+3\cdot u(t)$$

Řešení:

převedeme do L-transformace

$$p^3\cdot Y(p)+7\cdot p^2 Y(p)+16\cdot p\cdot Y(p)+12\cdot Y(p)=p\cdot U(p)+3\cdot U(p)$$

vytkneme Y(p) a U(p)

$$Y(p)\cdot(p^3+7\cdot p^2+16\cdot p+12)=U(p)\cdot(p+3)$$

vydělíme rovnici U(p)

$$\frac{Y(p)}{U(p)}\cdot(p^3+7\cdot p^2+16\cdot p+12)=(p+3)$$

vydělíme rovnici $(p^3+7\cdot p^2+16\cdot p+12)$

$$\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{(p+3)}{(p^3+7\cdot p^2+16\cdot p+12)}$$

$$G(p)=\frac{Y(p)}{U(p)}=\frac{(p+3)}{(p^3+7\cdot p^2+16\cdot p+12)}$$

$$p^3 + 7 \cdot p^2 + 16 \cdot p + 12 : p + 3 = p^2 + 4 \cdot p + 4$$

$$\underline{-p^3 - 3 \cdot p^2}$$

$$4 \cdot p^2 + 16 \cdot p$$

$$\underline{-4 \cdot p^2 - 12 \cdot p}$$

$$4 \cdot p + 12$$

$$\underline{-4 \cdot p - 12}$$

$$0$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{(p+3)}{(p^3 + 7 \cdot p^2 + 16 \cdot p + 12)} = \frac{p+4}{(p+4) \cdot (p^2 + 4 \cdot p + 4)} = \frac{1}{(p^2 + 4 \cdot p + 4)}$$

$$\underline{\underline{G(p) = \frac{1}{(p^2 + 4 \cdot p + 4)}}}$$

Řešený příklad

Zadání

Stanovte diferenciální rovnicí systému popsaného přenosem

$$G(p) = \frac{3{,}1 \cdot p^2 + 0{,}9 \cdot p + 1{,}1}{4{,}5 \cdot p^2 + p + 0{,}8}$$

Řešení:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{3{,}1 \cdot p^2 + 0{,}9 \cdot p + 1{,}1}{4{,}5 \cdot p^2 + p + 0{,}8}$$

vynásobíme rovnici U(p)

$$Y(p) = \frac{(3{,}1 \cdot p^2 + 0{,}9 \cdot p + 1{,}1) \cdot U(p)}{4{,}5 \cdot p^2 + p + 0{,}8}$$

vynásobíme rovnici $4{,}5 \cdot p^2 + p + 0{,}8$

$$(4{,}5 \cdot p^2 + p + 0{,}8) \cdot Y(p) = (3{,}1 \cdot p^2 + 0{,}9 \cdot p + 1{,}1) \cdot U(p)$$

$$4{,}5 \cdot p^2 \cdot Y(p) + p \cdot Y(p) + 0{,}8 \cdot Y(p) = 3{,}1 \cdot p^2 \cdot U(p) + 0{,}9 \cdot p \cdot U(p) + 1{,}1 \cdot U(p)$$

provedeme zpětnou L-transformaci

$$\underline{\underline{4{,}5 \cdot y''(t) + y'(t) + 0{,}8 \cdot y(t) = 3{,}1 \cdot u''(t) + 0{,}9 \cdot u'(t) + 1{,}1 \cdot u(t)}}$$

Shrnutí pojmů

Lineární diferenciální rovnice při experimentální identifikaci, obrazový přenos v L-transformaci, poloha pólů a nul soustavy, vlastnosti diferenciální rovnice, obrazového přenosu, polů a nul řešené soustavy, řešení převodů z obrazové oblasti do oblasti originálů, charakteristický polynom, překmit, podkmit, řešit převod diferenciální rovnice na obrazový přenos v Laplaceově transformaci a obráceně, tzn. z obrazového přenosu v Laplaceově transformaci na diferenciální rovnici užití zpětné Laplaceovy transformace.

Otázky

1. Napište obecný tvar diferenciální rovnice při identifikaci systému.
2. Definujte přenos systému v Laplaceově transformaci.
3. Jaké vlastnosti systému popisuje přenos systému.
4. Co to jsou póly a nuly systému a vysvětlete jejich význam pro stabilitu soustavy.
5. Co znamenají pojmy překmit a podkmit.

3.4. Rozdělení základních lineárních dynamických soustav

Čas ke studiu: 2 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat klasifikaci lineárních dynamických soustav
- popsat proporcionální, integrační a derivační soustavy
- řešit příklady stanovení dynamických vlastností soustavy s užitím Laplaceovy transformace

Výklad

Lineární dynamické soustavy lze třídit podle různých hledisek. Velmi důležitým hlediskem je vlastnost ustáleného stavu, a to, zda existuje (a je nenulový, příp. nulový) nebo neexistuje. Vlastnost ustáleného stavu se velmi dobře posuzuje podle průběhu přechodové charakteristiky $h(t)$ pro $t \rightarrow \infty$. Podle tohoto hlediska dělíme soustavy na:

- **proporcionální** (dřívější termín **statické**)
- **integrační** (dřívější termín **astatické**)
- **derivační.**

❑ Proporcionální soustavy

Řád diferenciální rovnice popisující soustavu vyjadřuje řád soustavy. Proporcionální soustavy se při vychýlení z ustáleného stavu samy ustálí na nové hodnotě ustáleného stavu, přičemž tento stav je nenulový. Proporcionální soustavy se vyznačují tím, že ve jmenovateli ani v čitateli přenosu $G(p)$ nelze vytknout komplexní proměnnou p. V diferenciální rovnici popisující proporcionální soustavu je koeficient a_0 nenulový. Přenosy základních proporcionálních členů mají tvar:

Soustava nultého řádu (proporcionální člen bez setrvačnosti, ideální proporcionální člen)

$$a_0\, y(t) = b_0\, u(t) \tag{82}$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0}{a_0} = k \tag{83}$$

kde k je zesílení soustavy (koeficient přenosu). Jeho fyzikální rozměr je dán poměrem fyzikálních rozměrů výstupní $y(t)$ a vstupní $u(t)$ veličiny. Pro $|k| > 1$ jde o zesílení a pro $|k| < 1$ o tlumení.

Příklady: zesilovače (proporcionální regulátor), převodovky, potrubí s kapalinami.

Obr. 27 Přechodová charakteristika soustavy 0. řádu

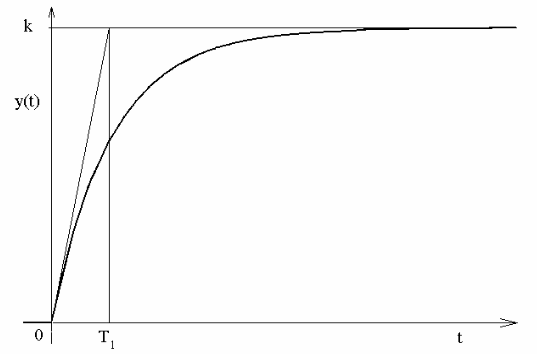
Soustava prvního řádu (proporcionální člen se setrvačností 1. řádu)

$$a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{84}$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0}{a_1 p + a_0} = \frac{k}{T p + 1} \tag{85}$$

kde je $k = \frac{b_0}{a_0}$ je zesílení soustavy (koeficient přenosu), $T = \frac{a_1}{a_0}$ je časová konstanta (s fyzikálním rozměrem čas).

Příklady: tlakové nádoby, průtok plynu, elektrické obvody s odpory a kapacitami, povrchová teplota materiálu, nádrže při regulaci hladiny, regulace otáček motorů.



Obr. 28 Přechodová charakteristika soustavy 1. řádu

Soustava druhého řádu (proporcionální člen se setrvačností 2. řádu)

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = b_0 u(t) \tag{86}$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0} = \frac{k}{T_2 p^2 + T_1 p + 1} \tag{87}$$

kde k je zesílení soustavy (koeficient přenosu), T_1, T_2 jsou časové konstanty.

O průběhu přechodové charakteristiky rozhoduje rozložení pólů a nul v komplexní rovině. Póly systému získáme řešením charakteristické rovnice (kvadratického trojčlenu ve jmenovateli přenosu):

$$p^2 + \frac{T_1}{T_2} p + \frac{1}{T_2} = 0 \tag{88}$$

$$p_{1,2} = -\frac{T_1}{2T_2} \pm \sqrt{\left(\frac{T_1}{2T_2}\right)^2 - \frac{1}{T_2}} \tag{89}$$

Průběh přechodové charakteristiky závisí na hodnotě diskriminantu D rovnice (89):

1) D < 0 (kořeny komplexně sdružené) - přechodová charakteristika je kmitavá (periodická),
2) D = 0 (dvojnásobný kořen) – přechodová charakteristika je na mezi aperiodi-city,
3) D > 0 (dva reálné záporné kořeny) – přechodová charakteristika je nekmitavá (aperiodická).

Jsou-li kořeny charakteristické rovnice komplexně sdružené (kmitavá soustava), pak je možno přenos vyjádřit ve tvaru:

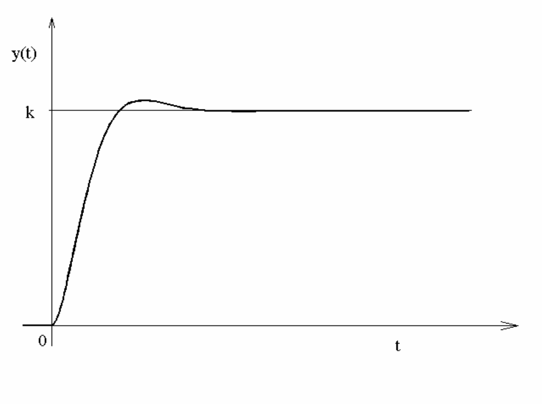
$$G(p) = \frac{k}{T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1}. \tag{90}$$

kde T_0 je perioda kmitání a ξ je koeficient tlumení.

Příklady:

Aperiodický průběh mají: soustavy tepelné, výměníky tepla, pece, nádrže, tlakové nádoby, regulace otáček a všechny soustavy složené ze dvou členů prvního řádu.

Kmitavý průběh mají: soustavy obsahující setrvačné hmoty (hmotnost na pružině), elektrické obvody současně obsahující odpory, indukčnosti a kapacity (oscilační obvody).



Obr. 29 Přechodová charakteristika kmitavé soustavy 2. řádu

Soustava s dopravním zpožděním (ideálně zpožďující člen)

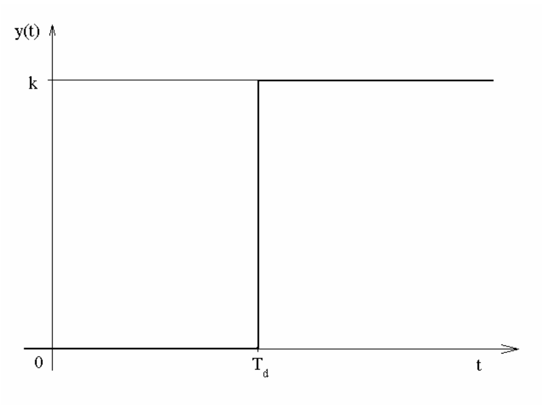
$$a_0\, y(t) = b_0\, u(t - T_d) \tag{91}$$

$$G(p) = \frac{b_0}{a_0}\, e^{-pT_d} = k\, e^{-pT_d} \tag{92}$$

kde T_d je dopravní zpoždění (s fyzikálním rozměrem čas).

Člen dopravního zpoždění se v časové oblasti vyznačuje tím, že časovou odezvu nezmění, ale pouze zpozdí o dopravní zpoždění T_d.

Příklady: dopravníky, řízení kontinuálních válcovacích stolic, vrstvení tekutými materiály (polévání filmové podložky emulsí).



Obr. 30 Přechodová charakteristika soustavy s dopravním zpožděním

❑ Integrační (astatické) soustavy

U integračních soustav klidový ustálený stav $h(\infty)$ na přechodové charakteristice $h(t)$ neexistuje, a proto u nich neexistuje ani statická charakteristika. Integrační soustavy se po vychýlení z ustáleného stavu bez působení regulátoru již neustálí v nové hodnotě ustáleného stavu. Prakticky to znamená, že pro každou nenulovou ustálenou hodnotu vstupní veličiny výstupní veličina roste (nebo klesá) až na hodnotu danou fyzikálním omezením. Integrační soustavy se vyznačují tím, že ve jmenovatelích jejich přenosů G(p) lze vytknout komplexní proměnnou p. V diferenciální rovnici popisující integrační soustavu je koeficient $a_0 = 0$. Přenosy základních integračních členů mají tvar:

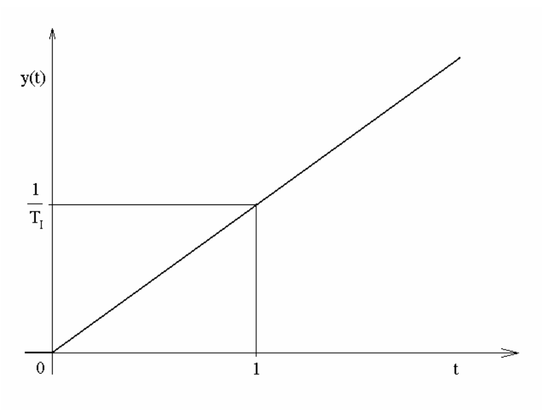
Soustava prvního řádu (integrační člen bez setrvačnosti, ideální integrační člen)

$$a_1 y'(t) = b_0 u(t) \tag{93}$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0}{a_1 p} = \frac{k_1}{p} = \frac{1}{T_I\, p} \tag{94}$$

kde $k_I = \dfrac{b_0}{a_1}$ je koeficient přenosu s fyzikálním rozměrem daným poměrem fyzikálních rozměrů výstupní $y(t)$ a vstupní $u(t)$ veličiny dělený časem, T_I je integrační časová konstanta ($T_I = \dfrac{1}{k_I}$).

Příklady: integrační regulátor, řízení vozidel, plnění velkých zásobníků plynem, zásobníky sypkých hmot, nádrže s nuceným přítokem a odtokem, kondenzátory.



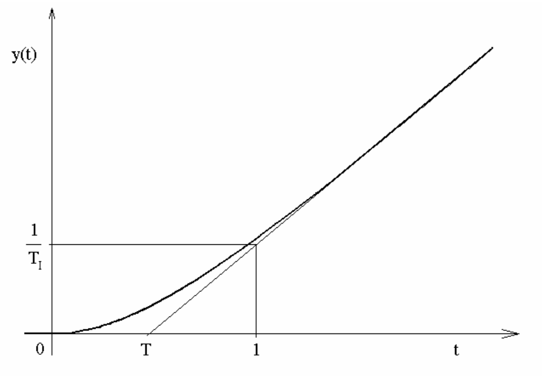
Obr. 31 Přechodová charakteristika integrační soustavy bez setrvačnosti

Soustava druhého řádu (integrační člen se setrvačností 1. řádu, reálný integrační člen)

$$a_2 y''(t) + a_1 y'(t) = b_0 u(t) \tag{95}$$

$$G(p) = \frac{b_0}{p(a_2 p + a_1)} = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)} = \frac{1}{T_I p(T_1 p + 1)} \tag{96}$$

kde $k_1 = \frac{b_0}{a_1}$ a $T_1 = \frac{a_2}{a_1}$



Obr. 32 Přechodová charakteristika integrační soustavy se setrvačností 1. řádu

V literatuře se užívá termín **řád astatismu**. Udává počet integračních členů. Např. integrační soustava $q+$ n-tého řádu se setrvačností n-tého řádu s řádem astatismu q má přenos:

$$G(p) = \frac{b_0}{p^q\left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} \ldots + a_1\right)} \tag{97}$$

Derivační soustavy

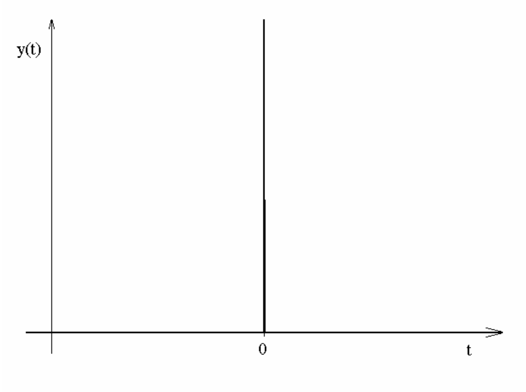
U derivačních soustav sice ustálený stav $h(\infty)$ na přechodové charakteristice $h(t)$ existuje, ale je nulový, tzn. statická charakteristika je triviální $y(\infty)=0$. Přenosy derivačních soustav se vyznačují tím, že v jejich čitatelích lze vytknout komplexní proměnnou p. Přenosy základních derivačních členů mají tvar:

Derivační soustava bez setrvačnosti (ideální derivační člen)

$$a_0 y(t) = b_1 u'(t) \tag{98}$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_1}{a_0} \cdot p = T_D \cdot p \tag{99}$$

kde $T_D = \frac{b_1}{a_0}$ je koeficient přenosu (derivační časová konstanta) s fyzikálním rozměrem daným poměrem fyzikálních rozměrů výstupní *y(t)* a vstupní *u(t)* veličiny násobený časem. Přechodovou charakteristikou je Diracův impuls. Ideální derivační člen je fyzikálně nerealizovatelný (m > n).



Obr. 33 Přechodová charakteristika ideální derivační soustavy

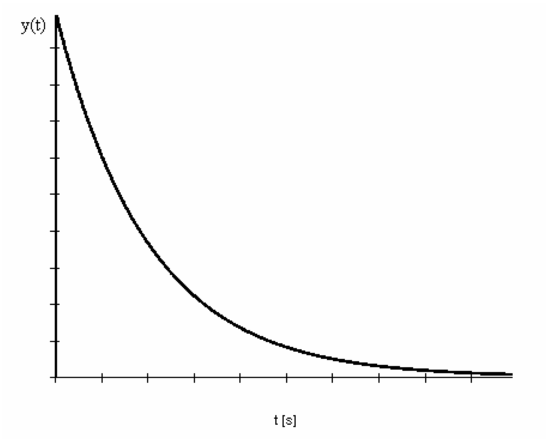
Derivační soustava se setrvačností 1. řádu (reálný derivační člen)

$$a_1 y'(t) + a_0\, y(t) = b_1\, u'(t) \tag{100}$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_1\, p}{a_1\, p + a_0} = \frac{b_1\, p}{T\, p + 1} = \frac{T_D\, p}{T\, p + 1} \tag{101}$$

kde $T_D = \frac{b_1}{a_0}$ je koeficient přenosu a $T = \frac{a_1}{a_0}$ je časová konstanta.

Příklad: derivační regulátor, elektrické obvody s odpory a kapacitami nebo s odpory a indukčnostmi.



Obr. 34 Přechodová charakteristika reálné derivační soustavy

Řešený příklad

Zadání

Stanovte přechodovou funkci systému popsaného přenosem

$$G(p)=\frac{1{,}5}{3\cdot p+0{,}5}$$

Řešení

$$h(t)=L^{-1}\left\{G(p)\cdot\frac{1}{p}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1{,}5}{3\cdot p+0{,}5}\cdot\frac{1}{p}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1{,}5}{p\cdot(3\cdot p+0{,}5)}\right\}$$

z Laplaceova slovníku podobný výraz vztah 7: $\frac{1}{p\cdot(p+a)}\to\frac{1}{a}\cdot\left(1-e^{-a\cdot t}\right)$

na tento výraz je třeba argument ve výrazu zpětné L-transformace upravit

$$h(t)=1{,}5\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{3\cdot p^2+0{,}5\cdot p}\right\}=1{,}5\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{3\cdot p^2+0{,}5\cdot p}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}\right\}=1{,}5\cdot L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{3}\cdot p^2+\frac{0{,}5}{3}\cdot p}\right\}$$

$$=1{,}5\cdot\frac{1}{3}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{1\cdot p^2+\frac{0{,}5}{3}\cdot p}\right\}=\frac{1{,}5}{3}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p\cdot(p+\frac{0{,}5}{3})}\right\}=\frac{1{,}5}{3}\cdot\frac{1}{\frac{0{,}5}{3}}\cdot\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{3}\cdot t}\right)$$

$$h(t)=\frac{1{,}5}{3}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{0{,}5}\cdot\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{3}\cdot t}\right)=\frac{1{,}5}{0{,}5}\cdot\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{3}\cdot t}\right)=3\cdot\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{3}\cdot t}\right)$$

$$\underline{\underline{h(t)=3\cdot\left(1-e^{-\frac{0{,}5}{3}\cdot t}\right)}}$$

Řešený příklad

Zadání

Stanovte impulsní funkci systému popsaného přenosem

$$G(p) = \frac{1}{2 \cdot p^2 + p}$$

Řešení

$$g(t) = L^{-1}\{G(p) \cdot 1\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{2 \cdot p^2 + p} \cdot 1\right\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{2 \cdot p^2 + p} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} \cdot p}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p^2 + \frac{1}{2} \cdot p}\right\} = \frac{1}{2} \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p \cdot (p + \frac{1}{2})}\right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot t}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot t}\right) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot t}$$

$$\underline{\underline{g(t) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \cdot t}}}$$

Řešený příklad

Zadání

Stanovte přechodovou a impulsní funkci systému popsaného diferenciální rovnicí

$$2 \cdot y''(t) + 8 \cdot y'(t) + 8 \cdot y(t) = u'(t) + 4 \cdot u(t)$$

Řešení

převedeme do L-transformace

$$2 \cdot p^2 Y(p) + 8 \cdot p \cdot Y(p) + 8 \cdot Y(p) = p \cdot U(p) + 4 \cdot U(p)$$

vytkneme Y(p) a U(p)

$$Y(p) \cdot (2 \cdot p^2 + 8 \cdot p + 8) = U(p) \cdot (p + 4)$$

vydělíme rovnici U(p)

$$\frac{Y(p)}{U(p)} \cdot (2 \cdot p^2 + 8 \cdot p + 8) = (p + 4)$$

vydělíme rovnici $(2 \cdot p^2 + 8 \cdot p + 8)$

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{(p+4)}{(2\cdot p^2 + 8\cdot p + 8)}$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{(p+4)}{(2\cdot p^2 + 8\cdot p + 8)}$$

Impulsní funkce

$$g(t) = L^{-1}\{G(p)\cdot U(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{p+4}{2\cdot(p+2)^2}\cdot 1\right\} = \frac{p+4}{2\cdot(p+2)^2} = \frac{A}{p+2} + \frac{B}{(p+2)^2}$$

cíl: stanovit konstanty A, B

Vynásobíme celou rovnici jmenovatelem zlomku na levé straně

$$\frac{p+4}{2\cdot(p+2)^2)}\cdot 2\cdot(p+2)^2 = \frac{A}{p+2}\cdot 2\cdot(p+2)^2 + \frac{B}{(p+2)^2}\cdot 2\cdot(p+2)^2$$

Upravíme

$$p+4 = A\cdot 2\cdot(p+2) + B\cdot 2$$

Vynásobíme celou rovnicí $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\cdot(p+4) = A\cdot(p+2) + B$$

Roznásobíme jednotlivé členy rovnice

$$\frac{1}{2}\cdot p + 2 = A\cdot p + 2\cdot A + B$$

Z rovnice vytvoříme soustavu rovnic

$$p^1: \quad \frac{1}{2} = A$$

$$p^0: \quad 2 = 2\cdot A + B \quad \Rightarrow B = 1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{p+4}{2\cdot(p+2)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{p+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{B}{(p+2)^2}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{p+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{-2\cdot t} + t\cdot e^{-2\cdot t}}}$$

Z Laplaceova slovníku vztah 6: $L^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\} \to e^{-a\cdot t}$

$$\frac{1}{2}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot e^{-2\cdot t}}}$$

Z Laplaceova slovníku vztah 13: $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^2}\right\} \to t\cdot e^{-a\cdot t}$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\right\} = \underline{\underline{t\cdot e^{-2\cdot t}}}$$

$$\underline{\underline{g(t) = \frac{1}{2}e^{-2\cdot t} + t\cdot e^{-2\cdot t}}}$$

Přechodová funkce

$$h(t) = L^{-1}\{G(p)\cdot U(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{p+4}{2\cdot(p+2)^2}\cdot\frac{1}{p}\right\} = \frac{p+4}{2\cdot p\cdot(p+2)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{(p+2)^2}$$

cíl: stanovit konstanty A, B, C

Vynásobíme celou rovnici jmenovatelem zlomku na levé straně

$$\frac{p+4}{2\cdot p\cdot(p+2)^2}\cdot 2\cdot p\cdot(p+2)^2 = \frac{A}{p}\cdot 2\cdot p\cdot(p+2)^2 + \frac{B}{(p+2)}\cdot 2\cdot p\cdot(p+2)^2 + \frac{C}{(p+2)^2}\cdot 2\cdot p\cdot(p+2)^2$$

Upravíme

$$p+4 = A\cdot 2\cdot(p+2)^2 + B\cdot 2\cdot(p+2) + C\cdot 2\cdot p$$

Vynásobíme celou rovnicí $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}\cdot(p+4) = A\cdot(p+2)^2 + B\cdot p\cdot(p+2) + C\cdot p$$

Roznásobíme jednotlivé členy rovnice

$$\frac{1}{2}\cdot p + 2 = A\cdot p^2 + 2\cdot p\cdot A + 4\cdot A + B\cdot p^2 + 2\cdot B\cdot p + C\cdot p$$

Z rovnice vytvoříme soustavu rovnic

$$p^2: \quad 0 = A + B \qquad \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$p^1: \quad \frac{1}{2} = 2 \cdot A + 2 \cdot B + C \quad \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$p^0: \quad 2 = 4 \cdot A \qquad \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{p+4}{2 \cdot (p+2)^2}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{A}{p}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{B}{(p+2)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{C}{(p+2)^2}\right\} =$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{p}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{-\frac{1}{2}}{(p+2)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{(p+2)^2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} + -\frac{1}{2} \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)}\right\} + \frac{1}{2} \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot t \cdot e^{-2 \cdot t}}}$$

Z Laplaceova slovníku vztah 3: $L^{-1}\left\{\frac{a}{p}\right\} \to a$

$$\frac{1}{2} \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

Z Laplaceova slovníku vztah 6: $L^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\} \to e^{-a \cdot t}$

$$-\frac{1}{2} \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\} = \underline{\underline{-\frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot t}}}$$

Z Laplaceova slovníku vztah 13: $L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^2}\right\} \to t \cdot e^{-a \cdot t}$

$$\frac{1}{2} \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+2)^2}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot t \cdot e^{-2 \cdot t}}}$$

$$\underline{\underline{h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2 \cdot t} + \frac{1}{2} \cdot t \cdot e^{-2 \cdot t}}}$$

Řešený příklad

Zadání

Stanovte přechodovou a impulsní funkci systému popsaného diferenciální rovnicí

$$5 \cdot y'(t) + y(t) = 3 \cdot u(t)$$

Řešení

převedeme do L-transformace

$$5 \cdot p \cdot Y(p) + Y(p) = 3 \cdot U(p)$$

vytkneme Y(p) a U(p)

$$Y(p) \cdot (5 \cdot p + 1) = U(p) \cdot 3$$

vydělíme rovnici U(p)

$$\frac{Y(p)}{U(p)} \cdot (5 \cdot p + 1) = 3$$

vydělíme rovnici výrazem $(5 \cdot p + 1)$

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{3}{(5 \cdot p + 1)}$$

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{3}{5 \cdot p + 1}$$

Impulsní funkce

$$g(t) = L^{-1}\{G(p) \cdot U(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{3}{5 \cdot p + 1} \cdot 1\right\} = 3 \cdot \frac{1}{5 \cdot p + 1} \cdot \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 3 \cdot \frac{\frac{1}{5}}{5 \cdot \frac{1}{5} p + 1 \cdot \frac{1}{5}} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{p + \frac{1}{5}} = \underline{\underline{\frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot t}}}$$

$$\underline{\underline{g(t) = \frac{3}{5} \cdot e^{-\frac{1}{5} \cdot t}}}$$

Přechodová funkce

$$h(t) = L^{-1}\{G(p)\cdot U(p)\} = L^{-1}\left\{\frac{3}{5\cdot p+1}\cdot\frac{1}{p}\right\} = 3\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{5\cdot p^2+p}\right\} = 3\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{5\cdot p^2+p}\cdot\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}}\right\} =$$

$$= 3\cdot L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{5}}{5\cdot\frac{1}{5}\cdot p^2+\frac{1}{5}\cdot p}\right\} = 3\cdot\frac{1}{5}\cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p\cdot(p+\frac{1}{5}p}\right\} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{5}}\cdot(1-e^{-\frac{1}{5}\cdot t}) =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{5}}\cdot(1-e^{-\frac{1}{5}\cdot t}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{5}{1}\cdot(1-e^{-\frac{1}{5}\cdot t})$$

$$\underline{h(t) = 3\cdot(1-e^{-\frac{1}{5}\cdot t})}$$

Shrnutí pojmů

Klasifikace lineárních dynamických soustav, proporcionální, integrační a derivační soustavy, soustavy nultého, první a druhého řádu, stanovení dynamických vlastností soustavy s užitím Laplaceovy transformace .

Otázky

1. Klasifikujte lineární dynamické systémy podle průběhu přechodové charakteristiky *h(t)*.
2. Charakterizujte proporcionální soustavu 1. řádu.
3. Charakterizujte proporcionální soustavu 2. řádu.
4. Charakterizujte integrační soustavu 1. řádu.
5. Charakterizujte derivační soustavu.

Úlohy k řešení

1. Stanovte přechodovou a impulsní funkci soustavy popsané diferenciální rovnicí ve tvaru
   $y'''(t)+7\cdot y''(t)+16\cdot y'(t)+12\cdot y(t)=u'(t)+3\cdot u(t)$.
2. Stanovte přechodovou a impulsní funkci soustavy popsané diferenciální rovnicí ve tvaru
   $y''(t)+5\cdot y'(t)+6\cdot y(t)=12$

3.5. Určování statických a dynamických vlastností soustav vyhodnocováním přechodových charakteristik

Čas ke studiu: 0,5 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat způsob určování statických a dynamických vlastností soustav.

Výklad

Měřením se určuje odezva *y(t)* soustavy při změní vstupního signálu *u(t)* skokem známé velikosti. Před provedením změny musí být soustava v ustáleném stavu. Změna vstupního signálu se obyčejně provede přestavením regulačního orgánu. Průběh výstupní veličiny *y(t)* se zaznamenává vhodným registračním zařízením.

Skoková změna vstupní veličiny musí proběhnout tak rychle, aby doba jejího přechodu z výchozí do konečné polohy byla mnohem kratší, než je odezva zkoumaného členu. Vlastní přechod musí být monotónní. Odezva registračního zařízení musí být mnohem rychlejší, než je odezva měřeného členu. Při měření charakteristik soustavy s krátkými časovými konstantami je nutno přivádět na vstup soustavy opakující se impulsy.

Pro svou jednoduchost a nenákladnost se nejčastěji používá měření přechodových charakteristik. Tvar přechodové charakteristiky závisí nejen na řádu soustavy, ale také na hodnotách nul a pólů přenosu. Většina reálných soustav v metalurgii neobsahuje v přenosu nuly, nýbrž póly, a to reálné.

Použití těchto metod je vhodné, je-li náhodný šum na výstupu soustavy zanedbatelný a jedná-li se o soustavy s velkými časovými konstantami. Důležité informace se nacházejí v samotném okolí počátku přechodové charakteristiky (rozhodují o řádu soustavy). Velikost přestavení regulačního orgánu (nastavení hodnoty vstupní veličiny) se volí podle skutečných podmínek, za kterých sledovaná soustava pracuje. Musí být dostatečně veliká, aby vedlejší poruchy nenarušily průběh odezvy. Velká přestavení však nejsou žádoucí, neboť mohou silně narušit režim soustavy a mohou se nepříznivě projevit i nelinearity systému. Na základě naměřeného průběhu odvozujeme (přepočítáváme) přechodovou charakteristiku jako odezvu na jednotkový skok, tj. na změnu vstupní veličiny o jednotku.

Přesné určení dynamických vlastností soustavy podle záznamů přechodových charakteristik běžně používanými měřicími a zapisovacími přístroji je prakticky nemožné. Proto se vyhodnocování přechodových charakteristik zpravidla spojuje s aproximací skutečných vlastností soustavy.

Shrnutí pojmů

Způsob určování statických a dynamických vlastností soustav.

Otázky

1. Charakterizujte statické a dynamické vlastnosti soustavy.
2. Popište způsob určování statických vlastností soustav.
3. Popište způsob určování dynamických vlastností soustav.

3.6. Aproximace přechodových charakteristik

Čas ke studiu: 2 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat a stanovit zesílení a časové konstanty proporcionálních soustav nultého, prvního a druhého řádu a integračních soustav prvního řádu
- popsat postup aproximací přechodových charakteristik identifikovaných soustav dle řádu soustavy
- vyřešit příklady s problematikou aproximace přechodových charakteristik soustav nultého, prvního a druhého řádu

Výklad

Identifikace systémů pomocí aproximace změřených přechodových charakteristik patří mezi deterministické metody, jejichž odvození vychází z analytického rozboru odezvy základních přenosových členů. Pro jejich správné použití je důležitá znalost typů odezev základních přenosových členů, jejichž sériovým řazením získáme přenosy, kterými aproximujeme změřené odezvy - přechodové charakteristiky systémů.

Změříme odezvu systému na skokovou změnu známé velikosti. Na začátku měření musí být soustava v rovnovážném stavu. Měření je vhodné pro potlačení chyb opakovat vícekrát a pro aproximaci použít střední pravděpodobný průběh přechodové charakteristiky nebo provést vyhodnocení více měření a určit z nich střední hodnoty hledaných parametrů. Při aproximaci přechodových charakteristik je důležité na základě hodnocení tvaru přechodové charakteristiky rozhodnout o typu přenosu, kterým budeme systém aproximovat.

Uvedených postupů bylo rozpracováno několik a zaujímají důležité místo mezi praktickými a racionálními postupy identifikace systémů. Mezi důležité práce a často odkazované i v zahraniční literatuře patří publikované postupy profesora Strejce.

❑ Aproximace proporcionální soustavou se setrvačností l.řádu

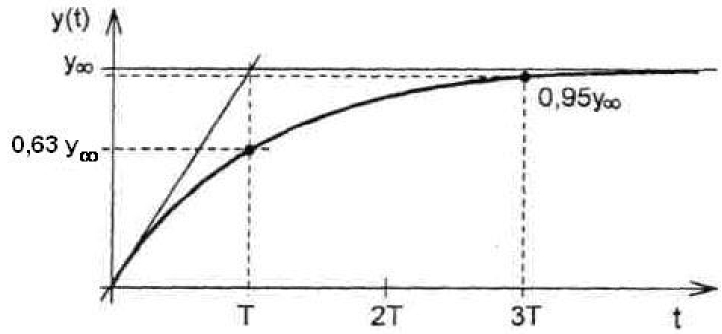
Pokud je doba průtahu T_n nulová (viz. dále) a odezva systému má průběh podobný odezvě proporcionálního členu se setrvačností 1. řádu, můžeme systém popsat přenosem:

$$G(p) = \frac{k}{1 + pT} \tag{102}$$

Zesílení *k* určíme z poměru ustálených hodnot výstupu a vstupu.

$$k = \frac{y(\infty)}{u(\infty)} \tag{103}$$

Časovou konstantu *T* stanovíme pomocí tečny k přechodové charakteristice v počátku nebo z hodnoty 0,63 resp. 0,95 (obr. 35).



Obr. 35 Aproximace přechodové charakteristiky proporcionální soustavou se setrvačností 1. řádu

Aproximace integrační soustavou bez setrvačnosti

Podobně u integračního systému, jehož přenos je:

$$a_1 y'(t) = b_0 u(t) \tag{104}$$

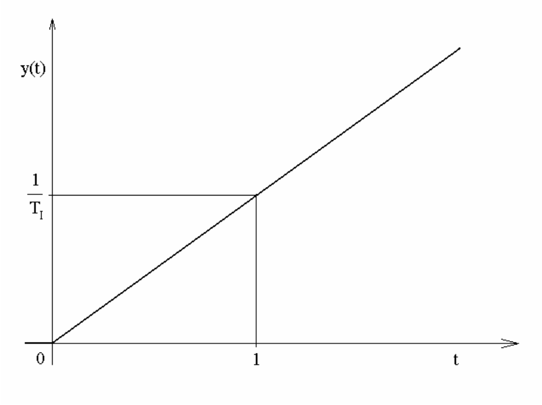
$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0}{a_1 p} = \frac{k_1}{p} = \frac{1}{T_1 p} \tag{105}$$

Pro jednotkový skok platí:

$$y(t) = \frac{1}{T_I}\ t = k_I\ t \tag{106}$$

Zvolíme-li $\Delta t = 1$, pak integrační časová konstanta T_I je rovna převrácené hodnotě přírůstku Δy za $\Delta t = 1$.

$$T_I = \frac{1}{\Delta y} \qquad k_I = \Delta y \tag{107}$$



Obr. 36 Aproximace přechodové charakteristiky integrační soustavou bez setrvačnosti

Aproximace proporcionální soustavou druhého a vyššího řádu

V praxi jsou nejčastějším případem proporcionální soustavy, u nichž kořeny charakteristické rovnice, póly systému, jsou vesměs reálné záporné, tedy odezva systému vykazuje aperiodický průběh. Podle metody navržené prof. Strejcem lze libovolný proporcionální systém výše uvedených vlastností aproximovat proporcionální soustavou buď n-tého řádu se stejnými časovými konstantami nebo druhého řádu s různě velkými časovými konstantami podle hodnoty τ, tj. poměru doby průtahu a doby náběhu (viz dále).

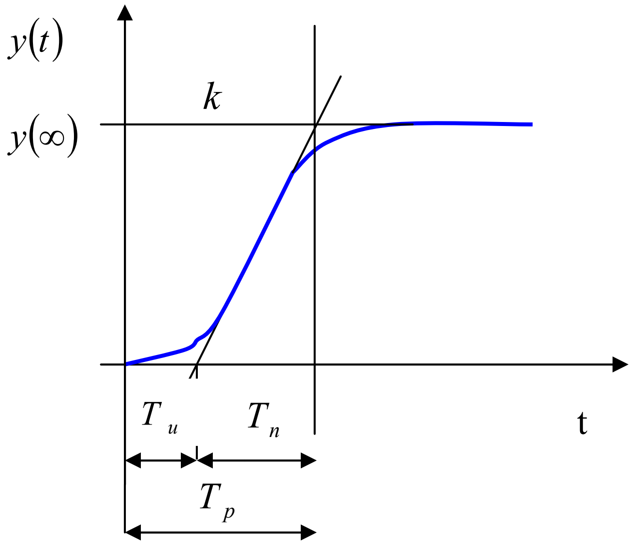
$$G(p) = \frac{k}{(T\,p+1)^n}\,e^{-pTd} \qquad (108)$$

$$G(p) = \frac{k}{(1+pT_1)(1+pT_2)}\,e^{-pTd} \qquad (109)$$

První přenos odpovídá systému n-tého řádu s jednou n-násobnou časovou konstantou T a dopravním zpožděním T_d. Druhý přenos odpovídá systému druhého řádu s dvěma navzájem různými časovými konstantami a dopravním zpožděním.

Pro přechodovou charakteristiku soustavy druhého a vyššího řádu je typické, že regulovaná veličina se po poruše okamžitě nemění jako u soustav prvního řádu (první derivace v čase t=0 je nulová). Analýzu provedeme pro soustavu bez dopravního zpoždění. V případě, že soustava má dopravní zpoždění, dá se toto zpoždění zjistit z fyzikálních a konstrukčních dat o soustavě nebo z měření (není-li od počátku přechodového děje patrná změna odezvy systému, označíme uvedenou dobu jako dopravní zpoždění T_d). Postup při určování řádu a časových konstant soustav bude stejný jako u soustav bez dopravního zpoždění. Typická přechodová charakteristika vyššího řádu je na obr. 37, kde T_u je doba průtahu, T_n je doba náběhu. Součet obou dob dává dobu přechodu T_p.

$$T_p = T_u + T_n \tag{110}$$

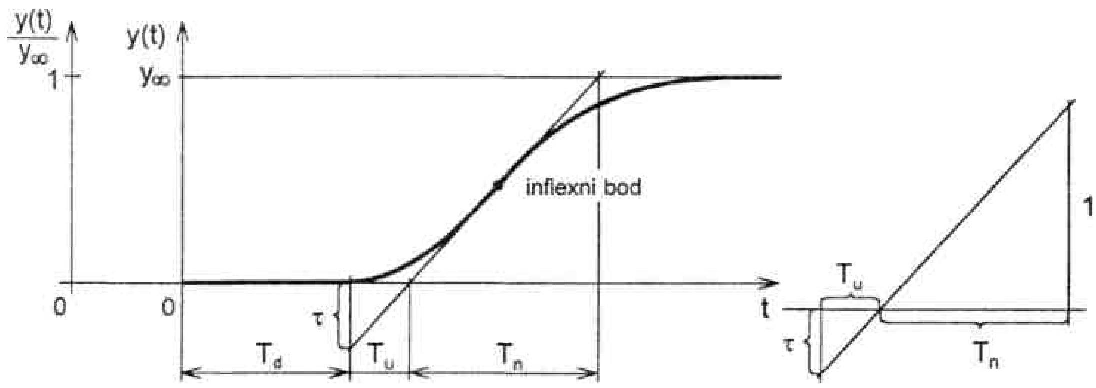


Obr. 37 Aproximace přechodové charakteristiky proporcionální soustavou vyššího řádu

Postup při aproximaci přechodové charakteristiky:

1) Změřenou přechodovou charakteristiku překreslíme v novém měřítku tak, aby ustálená hodnota *y(∞)* byla rovna jedné.

2) Sestrojíme tečnu v inflexním bodě přechodové charakteristiky. Tečna protne časovou osu v bodě, který je rozhodující pro konec doby průtahu T_u a začátek doby náběhu T_n. Doba náběhu je určena průsečíkem tečny v inflexním bodě s časovou osou a s pořadnicí ustáleného stavu. Určíme dobu průtahu T_u a náběhu T_n a na základě podobnosti trojúhelníku stanovíme jejich poměr τ:



Obr. 38 Poměr τ doby průtahu a doby náběhu

$$\tau = \frac{T_u}{T_n} \tag{111}$$

Grafické stanovení inflexního bodu nemusí být zcela přesné, proto ho zpřesníme pomocí vypočítaných hodnot z následující tabulky. Z tabulky určíme souřadnici inflexního bodu y_i a pomocí ní určíme z grafu příslušnou souřadnici t_i.

Tabulka 1 Stanovení řádu *n* aproximační soustavy a zpřesnění polohy inflexního bodu

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
τ	0	0,104	0,218	0,319	0,410	0,493
$\frac{y_i}{y(\infty)}$	0	0,264	0,323	0,353	0,371	0,384

3) Zesílení k plyne z ustálené hodnoty změřené přechodové charakteristiky

$$k = \frac{y(\infty)}{u(\infty)} \tag{112}$$

4) Pro $\tau \geq 0{,}104$ volíme aproximační přenos systému n-tého řádu se stejnými časovými konstantami podle rovnice (108). Řád systému určíme z velikosti τ, resp. z velikosti souřadnice y_i inflexního bodu podle výše uvedené tabulky (nejbližší řád). Časovou konstantu určíme ze vztahu:

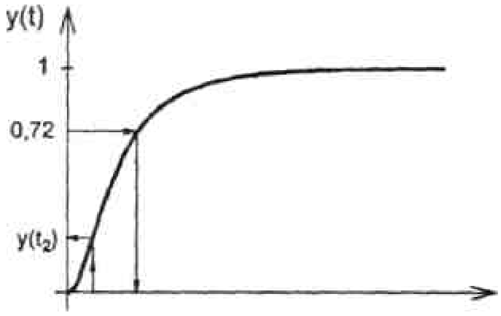
$$T = \frac{t_i}{n-1} \tag{113}$$

5) Pro $\tau < 0{,}104$ volíme přenos s dvěma různými časovými konstantami T_1 a T_2 podle rovnice (109). Pro souřadnici $y(t_1) = 0{,}72\,y(\infty)$ odečteme z grafu přechodové charakteristiky (obr. 40) časový úsek t_1 a vypočteme součet časových konstant:

$$T_1 + T_2 = \frac{t_1}{1{,}2564} \tag{114}$$

Vypočteme časový úsek t_2:

$$t_2 = 0{,}3574\,(T_1 + T_2) \tag{115}$$



Obr. 39 Aproximace proporcionální soustavou 2. řádu s rozdílnými časovými konstantami

Z grafu přechodové charakteristiky odečteme hodnotu $y(t_2)$ a z tabulky 2 určíme poměr časových konstant:

$$\tau_2 = \frac{T_2}{T_1} \tag{116}$$

Z rovnic (114) a (116) určíme hledané časové konstanty T_1 a T_2.

Tabulka 2 Určení poměru časových konstant τ_2

τ_2	0,1	0,2	0,3	0,4
τ	0,050	0,072	0,084	0,092
$\frac{y(t_2)}{y(\infty)}$	0,260	0,217	0,189	0,180

U proporcionálních soustav jak druhého tak vyššího řádu je okolí inflexního bodu téměř přímkové, takže tečnu lze sestrojit i pouhým přiložením pravítka. Předpokladem však je linearita systému, jeho stacionárnost a nízká úroveň šumu.

❑ Aproximace integrační soustavou se setrvačností

Astatické objekty s řádem astatismu rovným jedné, jejichž přechodová charakteristika je znázorněna na obr. 41, můžeme aproximovat přenosem:

$$G(p) = \frac{k_1}{p(T_1 p + 1)^n} = \frac{1}{T_I p(T_1 p + 1)^n} \tag{117}$$

Směrnice asymptoty k přechodové charakteristice pro t→∞ protíná časovou osu v čase $t = t_0$. Pořadnice přechodové charakteristiky v tomto čase je $y(t_0)$.

Pro stanovení řádu setrvačnosti n a velikosti časové konstanty přenosu T_I postupujeme následovně:

1) Z grafu odečteme hodnoty t_0, $y(t_0)$ a $k_I = \frac{1}{T_I}$, vypočteme pomocnou konstantu A:

$$A = \frac{y(t_0)}{k_I\, t_0} = \frac{y(t_0)}{\dfrac{t_0}{T_I}} \tag{118}$$

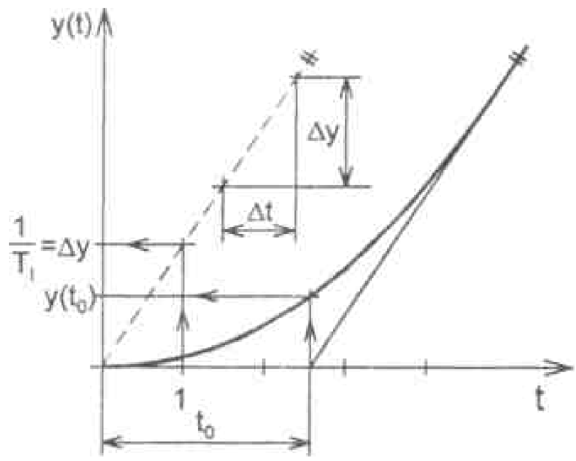
2) Z tabulky určíme řád systému n podle velikosti pomocné konstanty A.

Tabulka 3 Stanovení řádu *n* podle hodnoty konstanty *A*

n	1	2	3	4
A	0,368	0,271	0,224	0,195

3) Stanovíme hodnotu časové konstanty T_I:

$$T_I = \frac{t_0}{n} \tag{119}$$



Obr. 40 Vyhodnocení přechodové charakteristiky integračního členu se setrvačností

Řešený příklad

Zadání

Identifikujte soustavu zadanou přechodovou charakteristikou (viz. tabulka) pomocí metody grafického vyhodnocování přechodových charakteristik

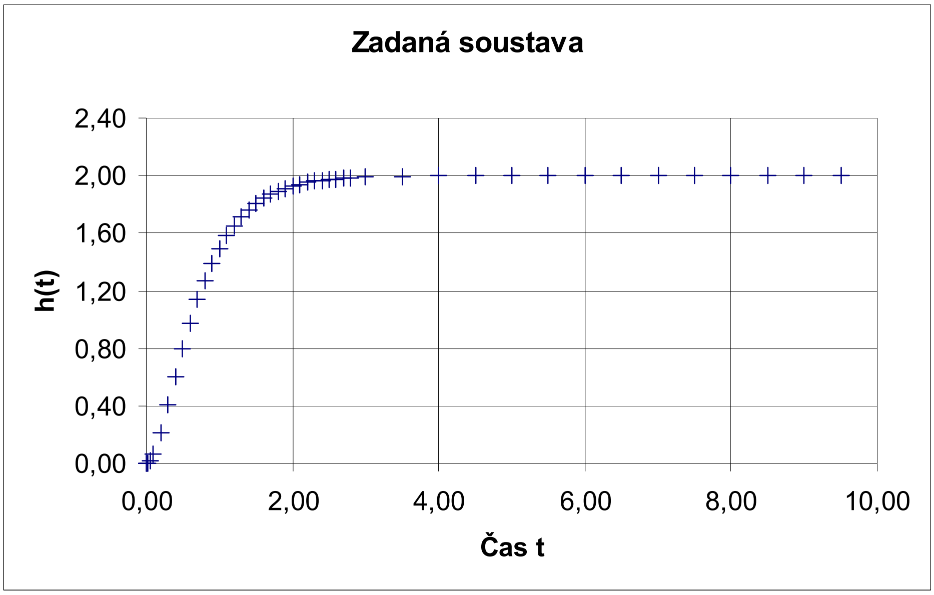
$b_0 = 1$	
t(s)	y(t)
0,01	0,000784
0,05	0,018112
0,1	0,065717
0,2	0,217378
0,3	0,407142
0,4	0,606477
0,5	0,799153
0,6	0,976659
0,7	1,135232
0,8	1,273938
0,9	1,393452
1	1,49529
1,1	1,581342
1,2	1,653588
1,3	1,713939
1,4	1,764155
1,5	1,805809
1,6	1,840274
1,7	1,868734
1,8	1,892198
1,9	1,911518
2	1,927408

t(s)	y(t)
2,1	1,940467
2,2	1,951192
2,3	1,959995
2,4	1,967216
2,5	1,973139
2,6	1,977995
2,7	1,981974
2,8	1,985236
3	1,990097
3,5	1,996354
4	1,998658
4,5	1,999506
5	1,999818
5,5	1,999933
6	1,999975
6,5	1,999991
7	1,999997
7,5	1,999999
8	2
8,5	2
9	2
9,5	2

Řešení:

Metoda grafického vyhodnocování přechodových charakteristik

Obrazový přenos soustavy



Zesílení:

$$k = \frac{y(\infty)}{u(\infty)} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2}}$$

Výpočet inflexního bodu:

t(s)	yp(t)	y'(t)	y"(t)
0,1	0,032859		
0,2	0,108689	0,758303	
0,3	0,203571	0,948821	1,905174
0,4	0,303239	0,996677	0,478558
0,5	0,399576	0,963378	-0,332984
0,6	0,488330	0,887531	-0,758468
0,7	0,567616	0,792866	-0,946652
0,8	0,636969	0,693530	-0,993357
0,9	0,696726	0,597568	-0,959626
1	0,747645	0,509191	-0,883765
1,1	0,790671	0,430260	-0,789318
1,2	0,826794	0,361228	-0,690313

Výpočet první numerické derivace

$$y'(t_i) = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

Výpočet druhé numerické derivace

$$y''(t_i) = \frac{y'(t_i) - y'(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}$$

1,3	0,856969	0,301756	-0,594725
1,4	0,882078	0,251083	-0,506724
1,5	0,902905	0,208269	-0,428145
1,6	0,920137	0,172325	-0,359434
1,7	0,934367	0,142301	-0,300245
1,8	0,946099	0,117319	-0,249818
1,9	0,955759	0,096598	-0,207214
2	0,963704	0,079453	-0,171449
2,1	0,970234	0,065295	-0,141575
2,2	0,975596	0,053623	-0,116719
2,3	0,979997	0,044013	-0,096102
2,4	0,983608	0,036109	-0,079045
2,5	0,986570	0,029613	-0,064960
2,6	0,988997	0,024278	-0,053347
2,7	0,990987	0,019899	-0,043786
2,8	0,992618	0,016307	-0,035922

Dle druhé derivace jsou souřadnice inflexního bodu [0,45; 0,35]

Rovnice sečny $y = k \cdot x + q$

Směrnice = první derivace v inflexním bodě = 0,98003

$q = y - k \cdot x = 0{,}35 - 0{,}98003 \cdot 0{,}45 = -0{,}091$

$y = 0{,}98003 \cdot x - 0{,}091$

Doba přechodu $y = 1 \Rightarrow 1 = 0{,}98003 \cdot x - 0{,}091$

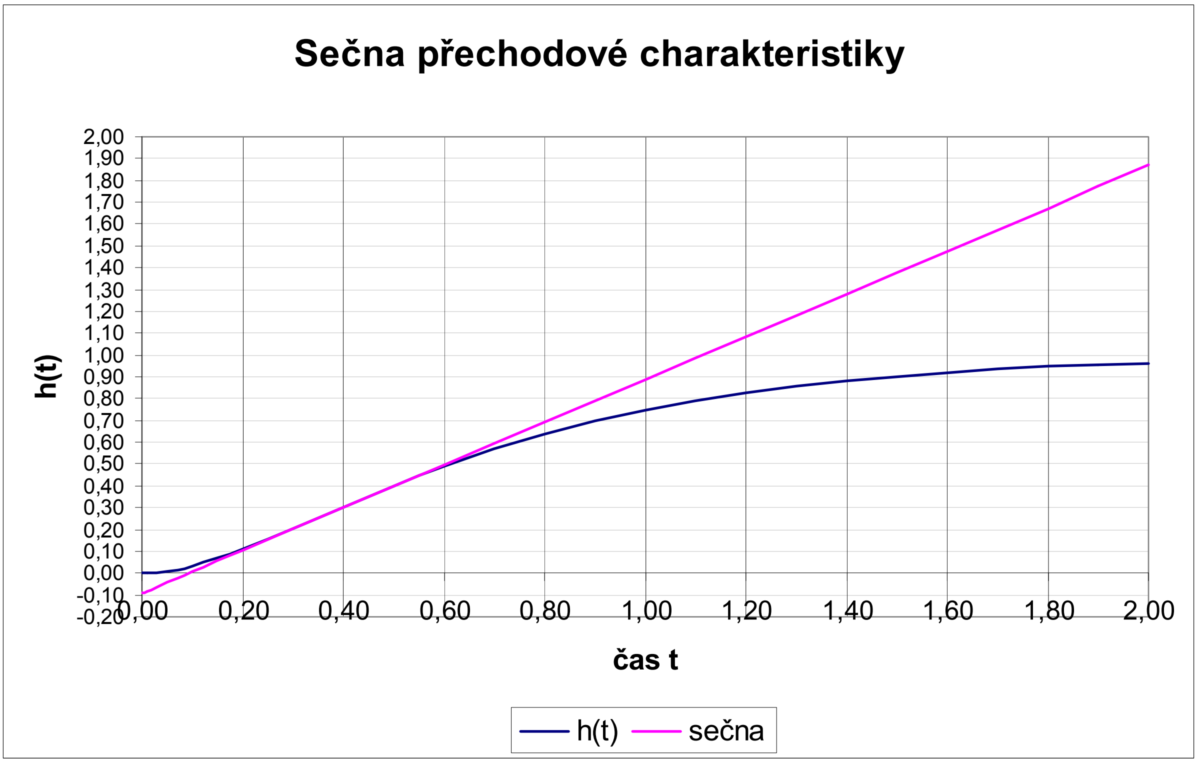
$$T_p = \frac{1 + 0{,}091}{0{,}98003} = 1{,}11323$$

Doba průtahu $y = 0 \Rightarrow 0 = 0{,}98003 \cdot x - 0{,}091$

$$T_u = \frac{0 + 0{,}091}{0{,}98003} = 0{,}09285$$

Doba náběhu $T_n = T_p - T_u = 1{,}11323 - 0{,}09285 = 1{,}02037$

$\tau = \dfrac{T_u}{T_n} = \dfrac{0{,}09285}{1{,}02037} = \underline{\underline{0{,}09099}}$ => τ < 0,104 → systém 2 řádu s různými časovými konstantami



$y(t_1) = 0{,}72 \rightarrow t_1 = 0{,}95$

$T_1 + T_2 = \dfrac{t_1}{1{,}2564} = \dfrac{0{,}95}{1{,}2564} = 0{,}75612$

$t_2 = 0{,}3574 \cdot (T_1 + T_2) = 0{,}3574 \cdot 0{,}75612 = 0{,}27024$

Z průběhu grafického průběhu přechodové charakteristiky resp. tabulky

$y(t_2) = 0{,}178$

Hodnotu τ_2 určíme numerickým výpočtem ze vztahu

$$y_2 = 1 + \frac{1}{\tau_2 - 1} \cdot e^{-t_2 \cdot (1 + t_2)} + \frac{1}{\frac{1}{\tau_2} - 1} \cdot e^{-t_2 \cdot (1 + \frac{1}{\tau_2})}$$

$$0{,}178 = 1 + \frac{1}{\tau_2 - 1} \cdot e^{-0{,}27024 \cdot (1 + t_2)} + \frac{1}{\frac{1}{\tau_2} - 1} \cdot e^{-0{,}27024 \cdot (1 + \frac{1}{\tau_2})}$$

$$\tau_2 = 0{,}104832 = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow T_2 = 0{,}104832 \cdot T_1$$

$$T_1 + T_2 = 0{,}75612$$

$$T_1 + 0{,}104832 \cdot T_1 = 0{,}75612$$
$$1{,}104832 \cdot T_1 = 0{,}75612 \Rightarrow T_1 = 0{,}684375$$

$$T_2 = 0{,}071744$$

$$G(p) = \frac{2}{(0{,}684375 \cdot p + 1) \cdot (0{,}071744 \cdot p + 1)}$$

Diferenciální rovnice soustavy

Diferenciální rovnice má tvar:

$$a_2 \cdot y''(t) + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = b_0 \cdot u(t)$$

Vyjádření konstant DR z přenosu:

$$G(p) = \frac{2}{(0{,}684375 \cdot p + 1) \cdot (0{,}071744 \cdot p + 1)} = \frac{2}{0{,}049099 \cdot p^2 + 0{,}756119 \cdot p + 1} = \frac{\frac{b_0}{a_0}}{\frac{a_2}{a_0} \cdot p^2 + \frac{a_1}{a_0} \cdot p + \frac{a_0}{a_0}}$$

$$k = \frac{b_0}{a_0} \Rightarrow 2 = \frac{1}{a_0} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\frac{a_1}{a_0} = T_1 \Rightarrow a_1 = T_1 \cdot a_0 = 0{,}756119 \cdot 0{,}5 = 0{,}378059$$

$$\frac{a_2}{a_0} = T_2 \Rightarrow a_2 = T_2 \cdot a_0 = 0{,}049099 \cdot 0{,}5 = 0{,}024549$$

Diferenciální rovnice soustavy:

$$0{,}024549 \cdot y''(t) + 10{,}378059 \cdot y'(t) + 0{,}5 \cdot y(t) = 1 \cdot u(t)$$

Přechodová funkce soustavy

Přechodová funkce je reakcí systému na Heavisideův jednotkový skok

Oblast obrazu:

$$H(p) = G(p) \cdot L\{\eta(t)\} = G(p) \cdot \frac{1}{p}$$

Časová oblast:

$$h(t) = L^{-1}\left\{G(p) \cdot \frac{1}{p}\right\} = L^{-1}\left\{\frac{2}{(0{,}684375 \cdot p + 1) \cdot (0{,}071747 \cdot p + 1)} \cdot \frac{1}{p}\right\}$$

$$\frac{2}{p \cdot (0{,}684375 \cdot p + 1) \cdot (0{,}071747 \cdot p + 1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{(0{,}684375 \cdot p + 1)} + \frac{C}{(0{,}071747 \cdot p + 1)}$$

$$2 = A \cdot (0{,}684375 \cdot p + 1) \cdot (0{,}071747 \cdot p + 1) + B \cdot p \cdot (0{,}071747 \cdot p + 1) + C \cdot p \cdot (0{,}684375 \cdot p + 1)$$

$$2 = 0{,}049102 \cdot A \cdot p^2 + 0{,}756122 \cdot A \cdot p + A + 0{,}071747 \cdot B \cdot p^2 + B \cdot p + 0{,}684375 \cdot C \cdot p^2 + C \cdot p$$

$$p^0 : \ 2 = A$$

$$p^1 : \ 0 = 0{,}756122 \cdot A + B + C$$

$$p^2 : \ 0 = 0{,}049102 \cdot A + 0{,}071747 \cdot B \cdot + 0{,}684375 \cdot C$$

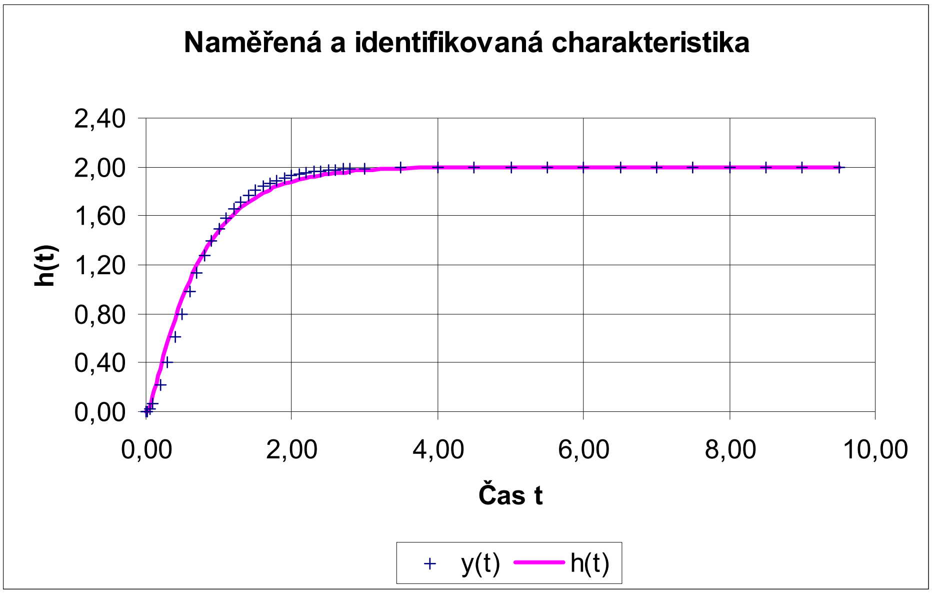
$$A = 2 \qquad B = -1{,}52905 \qquad C = 0{,}016806$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{p} + \frac{-1{,}52905}{(0{,}684375 \cdot p + 1)} + \frac{0{,}016806}{(0{,}071747 \cdot p + 1)}\right\} =$$

$$= 2 - 1{,}52905 \cdot \frac{1}{0{,}684375} \cdot e^{-\frac{1}{0{,}684375} \cdot t} + 0{,}016806 \cdot \frac{1}{0{,}071747} \cdot e^{-\frac{1}{0{,}071747} \cdot t}$$

$$\underline{\underline{h(t) = 2 - 2{,}23423 \cdot e^{-1{,}461187 \cdot t} + 0{,}234239 \cdot e^{-13{,}93787 \cdot t}}}$$

Grafické znázornění přechodové charakteristiky dle zadání a dle vypočtené přechodové funkce



Stanovení chyby metody

t	y(t)	h(t)	Δm=y(t)-h(t)
0,00	0,000000	0,000011	0,000011
0,01	0,000784	0,001945	0,001161
0,05	0,018112	0,039865	0,021753
0,1	0,065717	0,127626	0,061909
0,2	0,217378	0,346367	0,128989
0,3	0,407142	0,562287	0,155145
0,4	0,606477	0,755533	0,149056
0,5	0,799153	0,924165	0,125012
0,6	0,976659	1,070283	0,093624
0,7	1,135232	1,196640	0,061408
0,8	1,273938	1,305844	0,031906
0,9	1,393452	1,400209	0,006757
1	1,495290	1,481747	0,013543
1,1	1,581342	1,552201	0,029141
1,2	1,653588	1,613077	0,040511
1,3	1,713939	1,665677	0,048262
1,4	1,764155	1,711126	0,053029
1,5	1,805809	1,750397	0,055412
1,6	1,840274	1,784330	0,055944
1,7	1,868734	1,813649	0,055085
1,8	1,892198	1,838982	0,053216
1,9	1,911518	1,860872	0,050646
2	1,927408	1,879786	0,047622
2,1	1,940467	1,896128	0,044339
2,2	1,951192	1,910249	0,040943
2,3	1,959995	1,922450	0,037545
2,4	1,967216	1,932993	0,034223
2,5	1,973139	1,942102	0,031037
2,6	1,977995	1,949973	0,028022
2,7	1,981974	1,956774	0,025200
2,8	1,985236	1,962650	0,022586
3	1,990097	1,972115	0,017982
3,5	1,996354	1,986570	0,009784
4	1,998658	1,993532	0,005126
4,5	1,999506	1,996885	0,002621
5	1,999818	1,998500	0,001318
5,5	1,999933	1,999277	0,000656
6	1,999975	1,999652	0,000323
6,5	1,999991	1,999832	0,000159
7	1,999997	1,999919	0,000078
7,5	1,999999	1,999961	0,000038
8	2,000000	1,999981	0,000019
8,5	2,000000	1,999991	0,000009
9	2,000000	1,999996	0,000004
9,5	2,000000	1,999998	0,000002
	průměrná odchylka		0,036470

Shrnutí pojmů

Přechodová charakteristika, zesílení a časové konstanty proporcionálních soustav nultého, prvního a druhého řádu a integračních soustav prvního řádu, Strejcova metoda, postup aproximací přechodových charakteristik identifikovaných soustav dle řádu soustavy, příklady s problematikou aproximace přechodových charakteristik soustav nultého, prvního a druhého řádu.

Otázky

1. Vysvětlete pojmy přechodová charakteristika a přechodová funkce.
2. Pomocí jakého přenosu systému je aproximována proporcionální soustava 1. řádu.
3. Vysvětlete princip metody prof. Strejce aproximace proporcionálních soustav druhého a vyšší řádu.
4. Jak jsou aproximovány přechodové charakteristiky integračních soustav.

Úlohy k řešení

1. Identifikujte soustavu aproximací přechodové charakteristiky dané tabulkou.

t	y	t	y	t	y
0.0	0.000				
0.5	0.240	10.5	2.479	20.5	2.902
1.0	0.461	11.0	2.520	21.0	2.909
1.5	0.664	11.5	2.559	21.5	2.917
2.0	0.850	12.0	2.594	22.0	2.923
2.5	1.022	12.5	2.626	22.5	2.929
3.0	1.180	13.0	2.656	23.0	2.935
3.5	1.326	13.5	2.684	23.5	2.940
4.0	1.460	14.0	2.709	24.0	2.945
4.5	1.583	14.5	2.732	24.5	2.949
5.0	1.696	15.0	2.754	25.0	2.953
5.5	1.800	15.5	2.773	25.5	2.957
6.0	1.896	16.0	2.792	26.0	2.961
6.5	1.985	16.5	2.808	26.5	2.964
7.0	2.066	17.0	2.824	27.0	2.967
7.5	2.140	17.5	2.838	27.5	2.969
8.0	2.209	18.0	2.851	28.0	2.972

8.5	2.272	18.5	2.863	28.5	2.974
9.0	2.331	19.0	2.874	29.0	2.976
9.5	2.384	19.5	2.884	29.5	2.978
10.0	2.433	20.0	2.893	30.0	2.980

3.7. Určení koeficientů diferenciální rovnice metodou postupné integrace.

Čas ke studiu: 2,5 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat princip metody postupné integrace
- vyřešit identifikaci soustavy užitím metody postupné integrace.

Výklad

V mnohých praktických případech je výhodnější použít pro identifikaci obecný nenormovaný vstupní signál a analyzovat odpovídající odezvu na výstupu. Metoda postupné integrace umožňuje aproximaci přechodových charakteristik a také odezev systému na jiný vstupní signál, než ve tvaru skokové funkce.

V dalším se zaměříme na vyhodnocování přechodové charakteristiky touto metodou. Známe-li měřením zjištěnou přechodovou charakteristiku soustavy a za předpokladu, že přenos identifikované soustavy předpokládáme ve tvaru:

$$G(p) = \frac{1}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n} \tag{120}$$

lze pro určení konstant $a_0 \ldots a_n$ použít metodu postupné integrace.

Při experimentu vycházíme z předpokladu, že účinky šumu jsou vzhledem k užitečnému signálu zanedbatelné a dále předpokládáme, že na začátku měření v čase t=0 a na jeho konci v čase t=∞ je soustava v ustáleném stavu, přičemž oba ustálené stavy obecně nemusí být stejné. Podle tohoto předpokladu platí:

$$y^{'}(0) = y^{''}(0) = ...y^{(n-1)}(0) = 0 \tag{121}$$

$$y^{'}(\infty) = y^{''}(\infty) = ...y^{(n-1)}(\infty) = 0$$

Diferenciální rovnice, která odpovídá výše uvedenému přenosu je:

$$a_n \cdot y^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 \cdot y'(t) + a_0 \cdot y(t) = u(t) \tag{122}$$

Úkolem identifikace je nyní z hodnot známého vstupního signálu a změřené odezvy systému určit koeficienty diferenciální rovnice a_0 ... a_n.

Pomocí hodnot $y(t)$ a $u(t)$ v ustálených stavech můžeme koeficient a_0 určit přímo:

$$a_0 = \frac{u(\infty)}{y(\infty))}$$

Pro určování dalších koeficientů je účelné zavést substituci:

$$\bar{y}(t) = y(\infty) - y(t) \tag{123}$$

$$\bar{u}(t) = u(\infty) - u(t)$$

Jelikož pro vstupní signál platí:

$$u(t) = u(\infty) = 1 \qquad pro\ všechna\ t \geq 0$$

rovnici (122) pak můžeme psát ve tvaru transformované diferenciální rovnice:

$$a_n \cdot \bar{y}^{(n)}(t) + a_{n-1} \cdot \bar{y}^{(n-1)}(t) + ... + a_1 \cdot \bar{y}'(t) + a_0 \cdot \bar{y}(t) = 0 \tag{124}$$

Tuto rovnici integrujeme v intervalu <0, ∞>. Vzhledem k uvedeným počátečním podmínkám jsou integrace členů s derivacemi $y(t)$ rovny nule a dostaneme:

$$a_1 [\bar{y}(t)]_0^\infty + a_0 \int_0^\infty \bar{y}(t) dt = 0 \tag{125}$$

Z uvedené rovnice určíme koeficient a_1:

$$a_1 = \frac{a_0 \int_0^\infty [y(\infty) - y(t)] dt}{y(\infty) - y(0)} \tag{126}$$

Při určování koeficientu a_2 integrujeme rovnici nejdříve v intervalu <t, ∞> a pak v intervalu <0, ∞>:

$$-a_n \cdot \overline{y}^{(n-1)}(t) - a_{n-1} \cdot \overline{y}^{(n-2)}(t) \ldots - a_2 \cdot \overline{y}'(t) - a_1 \cdot \overline{y}(t) + a_0 \int_t^\infty \overline{y}(t)\,dt = 0 \qquad (127)$$

$$a_2 \overline{y}(0) - a_1 \int_0^\infty \overline{y}(t)\,dt + a_0 \int_0^\infty \int_t^\infty \overline{y}(t)\,dt^2 = 0 \qquad (128)$$

Z uvedené rovnice určíme koeficient a_2:

$$a_2 = \frac{a_1 \int_0^\infty [y(\infty) - y(t)]\,dt - a_0 \int_0^\infty \int_t^\infty [y(\infty) - y(t)]\,dt^2}{y(\infty) - y(0)} \qquad (129)$$

Další koeficienty by bylo možné určit další integrací (při výpočtu koeficientu a_3 bychom rovnici integrovali nejdříve dvakrát v intervalu <t, ∞> a pak v intervalu <0, ∞>). Vzhledem k integrační metodě, která se aplikuje na experimentální soubor dat, roste chyba vyhodnocení velmi rychle nad přípustnou mez. Prakticky je metoda postupné integrace vhodná pro aproximaci odezev pomocí modelů do 2. řádu.

Řešený příklad

Zadání

Identifikujte soustavu zadanou přechodovou charakteristikou (viz. tabulka) pomocí metody postupné integrace.

$b_0 = 1$	
t(s)	y(t)
0,01	0,000784
0,05	0,018112
0,1	0,065717
0,2	0,217378
0,3	0,407142
0,4	0,606477
0,5	0,799153
0,6	0,976659
0,7	1,135232
0,8	1,273938

t(s)	y(t)
2,1	1,940467
2,2	1,951192
2,3	1,959995
2,4	1,967216
2,5	1,973139
2,6	1,977995
2,7	1,981974
2,8	1,985236
3	1,990097
3,5	1,996354

0,9	1,393452
1	1,49529
1,1	1,581342
1,2	1,653588
1,3	1,713939
1,4	1,764155
1,5	1,805809
1,6	1,840274
1,7	1,868734
1,8	1,892198
1,9	1,911518
2	1,927408

4	1,998658
4,5	1,999506
5	1,999818
5,5	1,999933
6	1,999975
6,5	1,999991
7	1,999997
7,5	1,999999
8	2
8,5	2
9	2
9,5	2

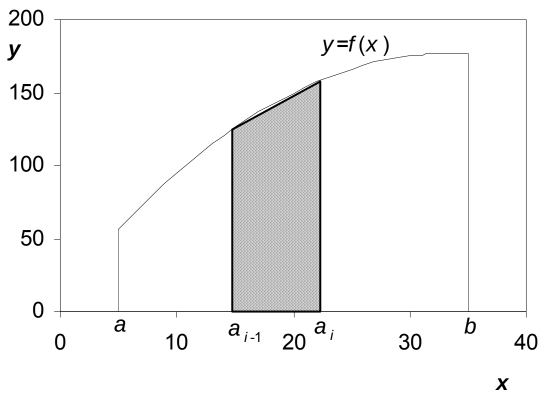
Řešení:

Metoda postupné integrace

Pro řešení určitých integrálů bude využit numerický výpočet pomocí lichoběžníkové metody.

Princip lichoběžníkové metody

Na jednotlivých podintervalech aproximujeme funkci $f(x)$ polynomy prvého stupně (lineární funkcí: $g(x) = \mathrm{a} + \mathrm{b}x$).



Potom

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{f(a_0)+f(a_1)}{2} + \frac{f(a_1)+f(a_2)}{2} + \ldots + \frac{f(a_{m-1})+f(a_m)}{2}\right] + E(f)$$

po úpravě

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{1}{2}f(a_0) + f(a_1) + \ldots + f(a_{m-1}) + \frac{1}{2}f(a_m)\right] + E(f)$$

Pro výpočet chyby platí

$$E(f) = -\frac{b-a}{12}(h)^2 f''(\xi)\text{, kde } \xi \in \langle a,b \rangle.$$

Má-li integrovaná funkce spojitou druhou derivaci, pak vhodnou volbou počtu podintervalů lze dosáhnout libovolně malé chyby.

Obrazový přenos soustavy

$$G(p) = \frac{1}{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}$$

$$a_0 = \frac{u(\infty)}{y(\infty)} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

t(s)	y(t)	y(t)'	y(∞)-y(t)	∫(y(∞)-y(t))dt	∫∫(y(∞)-y(t))dt²	∫∫∫(y(∞)-y(t))dt³
0.00	0.000000	0.000000	1.000000	3.014872	7.641344	18.002800
0.50	0.799153	0.399576	0.600424	1.414448	3.212024	7.149432
1.00	1.495290	0.747645	0.252355	0.561669	1.235907	2.701501
1.50	1.805809	0.902905	0.097095	0.212219	0.462019	1.003575
2.00	1.927408	0.963704	0.036296	0.078828	0.170972	0.370584
2.50	1.973139	0.986570	0.013430	0.029102	0.063042	0.136570
3.00	1.990097	0.995049	0.004951	0.010721	0.023219	0.050309
3.50	1.996354	0.998177	0.001823	0.003947	0.008551	0.018539
4.00	1.998658	0.999329	0.000671	0.001453	0.003151	0.006837
4.50	1.999506	0.999753	0.000247	0.000535	0.001163	0.002523
5.00	1.999818	0.999909	0.000091	0.000197	0.000431	0.000929
5.50	1.999933	0.999967	0.000033	0.000073	0.000161	0.000337
6.00	1.999975	0.999988	0.000012	0.000028	0.000060	0.000116
6.50	1.999991	0.999995	0.000005	0.000011	0.000021	0.000035
7.00	1.999997	0.999998	0.000002	0.000004	0.000006	0.000008
7.50	1.999999	0.999[illegible]	0.000001	0.000001	0.000001	0.000001
8.00	2.000000	1.000000	0.00000[illegible]	0.000000	0.000000	0.000000
			Hodnota integrálu	0.753718	1.910336	4.500700

$$a_1 = \frac{a_0 \cdot \int [y(\infty) - y(t)] dt}{y(\infty) - y(0)} = \frac{0,5 \cdot 0,753718}{2 - 0} = \underline{0,188429}$$

$$a_2 = \frac{a_1 \cdot \int [y(\infty) - y(t)] dt - a_0 \cdot \int\int [y(\infty) - y(t)] dt^2}{y(\infty) - y(0)} = \frac{0,188429 \cdot 0,753718 - 0,5 \cdot 1,910336}{2 - 0} = \underline{-0,813145}$$

$$G(p) = \frac{1}{0,5 + 0,188429 p}$$

Diferenciální rovnice soustavy

$$0,188429 \cdot y'(t) + 0,5 \cdot y(t) = u(t)$$

Přechodová funkce soustavy

Obraz přechodové funkce:

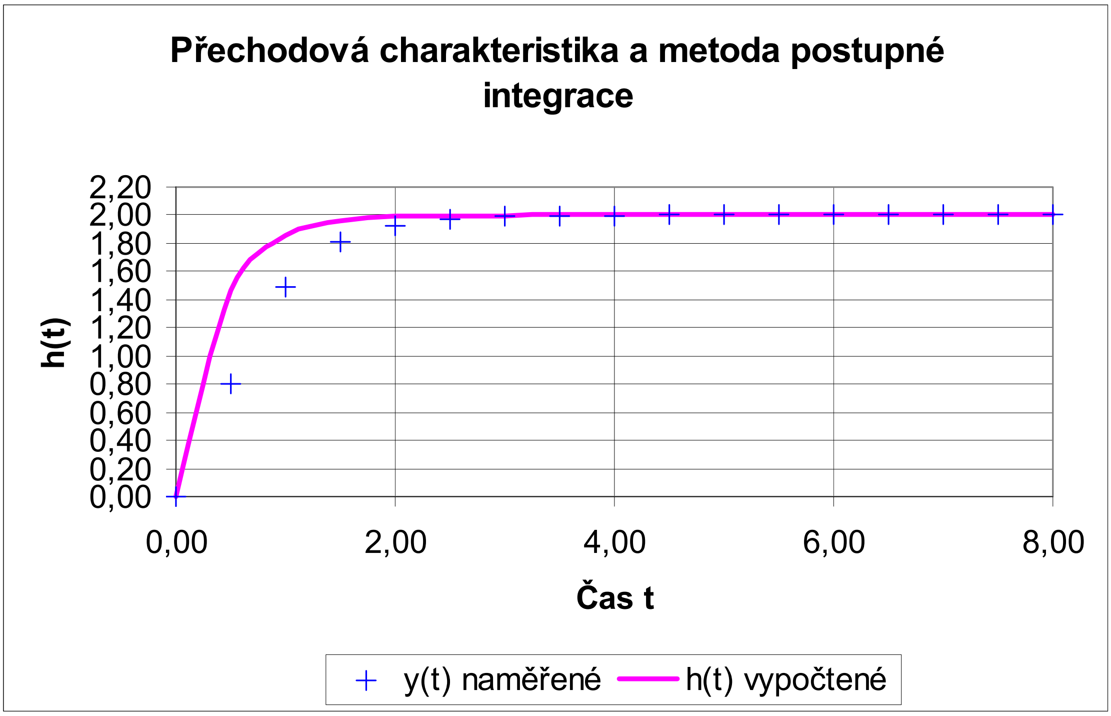
$$H(p) = G(p) \cdot L\{\eta(t)\} = G(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p \cdot (0,5 + 0,188429 \cdot p)} = \frac{1}{p} \cdot \frac{\frac{1}{0,5}}{\frac{0,188429}{0,5} \cdot p + \frac{0,5}{0,5}} = \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{0,376858 p + 1}$$

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{2}{p \cdot (0,376858 \cdot p + 1)}\right\} = 2 \cdot L^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{0,376858}}{p \cdot \left(p + \frac{1}{0,376858}\right)}\right\} = 2 \cdot \frac{1}{0,376858} \cdot L^{-1}\left\{\frac{1}{p \cdot \left(p + \frac{1}{0,376858}\right)}\right\} =$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{0,376858} \cdot \frac{1}{\frac{1}{0,376858}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{0,376858} \cdot t}\right) = 2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{0,376858} \cdot t}\right)$$

$$\underline{\underline{h(t) = 2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{1}{0,376858} \cdot t}\right)}}$$

Grafické znázornění přechodové charakteristiky dle zadání a dle vypočtené přechodové funkce



Stanovení chyby metody

t	y(t)	h(t)	Δm=y(t)-h(t)
0,00	0,000000	0,000000	0,000000
0,01	0,000784	0,052372	0,051588
0,05	0,018112	0,248502	0,230390
0,1	0,065717	0,466128	0,400411
0,2	0,217378	0,823618	0,606240
0,3	0,407142	1,097791	0,690649
0,4	0,606477	1,308063	0,701586
0,5	0,799153	1,469329	0,670176
0,6	0,976659	1,593009	0,616350
0,7	1,135232	1,687864	0,552632
0,8	1,273938	1,760612	0,486674
0,9	1,393452	1,816404	0,422952
1	1,495290	1,859194	0,363904
1,1	1,581342	1,892011	0,310669
1,2	1,653588	1,917179	0,263591
1,3	1,713939	1,936482	0,222543
1,4	1,764155	1,951286	0,187131
1,5	1,805809	1,962639	0,156830
1,6	1,840274	1,971347	0,131073
1,7	1,868734	1,978025	0,109291
1,8	1,892198	1,983146	0,090948
1,9	1,911518	1,987074	0,075556
2	1,927408	1,990087	0,062679
2,1	1,940467	1,992397	0,051930
2,2	1,951192	1,994169	0,042977
2,3	1,959995	1,995528	0,035533

2,4	1,967216	1,996570	0,029354
2,5	1,973139	1,997370	0,024231
2,6	1,977995	1,997983	0,019988
2,7	1,981974	1,998453	0,016479
2,8	1,985236	1,998813	0,013577
3	1,990097	1,999302	0,009205
3,5	1,996354	1,999815	0,003461
4	1,998658	1,999951	0,001293
4,5	1,999506	1,999987	0,000481
5	1,999818	1,999997	0,000179
5,5	1,999933	1,999999	0,000066
6	1,999975	2,000000	0,000025
6,5	1,999991	2,000000	0,000009
7	1,999997	2,000000	0,000003
7,5	1,999999	2,000000	0,000001
8	2,000000	2,000000	0,000000
8,5	2,000000	2,000000	0,000000
9	2,000000	2,000000	0,000000
9,5	2,000000	2,000000	0,000000
	průměrná odchylka		0,170059

CD-ROM_5 – Lichoběžníková metoda (ANIMACE_3_C)

V rámci animace je možné se seznámit s lichoběžníkovou metodou numerického řešení určitého integrálu, jako metody pro výpočty integrálů při identifikaci soustavy postupnou integrací.

Shrnutí pojmů

Princip metody postupné integrace, lichoběžníková metoda, identifikace soustavy užitím metody postupné integrace.

Otázky

1. Vysvětlete princip metody postupné integrace.
2. Srovnejte metodu postupné integrace s identifikací soustavy metodou aproximace přechodových charakteristik.
3. K čemu se využívá při metodě postupné integrace lichoběžníková metoda.
4. Co je hlavní nevýhodou metody postupné integrace.

Úlohy k řešení

1. Identifikujte soustavu aproximací přechodové charakteristiky dané tabulkou.

t	y	t	y	t	y
0.0	0.000				
0.5	0.240	10.5	2.479	20.5	2.902
1.0	0.461	11.0	2.520	21.0	2.909
1.5	0.664	11.5	2.559	21.5	2.917
2.0	0.850	12.0	2.594	22.0	2.923
2.5	1.022	12.5	2.626	22.5	2.929
3.0	1.180	13.0	2.656	23.0	2.935
3.5	1.326	13.5	2.684	23.5	2.940
4.0	1.460	14.0	2.709	24.0	2.945
4.5	1.583	14.5	2.732	24.5	2.949
5.0	1.696	15.0	2.754	25.0	2.953
5.5	1.800	15.5	2.773	25.5	2.957
6.0	1.896	16.0	2.792	26.0	2.961
6.5	1.985	16.5	2.808	26.5	2.964
7.0	2.066	17.0	2.824	27.0	2.967
7.5	2.140	17.5	2.838	27.5	2.969
8.0	2.209	18.0	2.851	28.0	2.972
8.5	2.272	18.5	2.863	28.5	2.974
9.0	2.331	19.0	2.874	29.0	2.976
9.5	2.384	19.5	2.884	29.5	2.978
10.0	2.433	20.0	2.893	30.0	2.980

Srovnejte výsledky s příkladem z předchozí kapitoly.

4. STATISTICKÉ METODY IDENTIFIKACE

Čas ke studiu: 2 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat statickou identifikaci systému, náhodná veličina, náhodný proces.

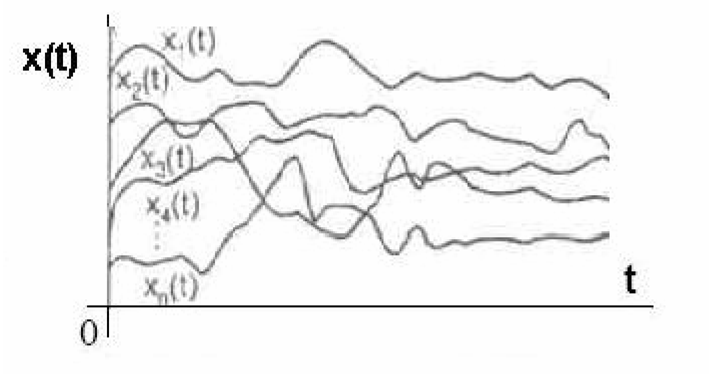
Výklad

Statistické metody identifikace dynamických systémů vychází z jiného pohledu na popis dynamických vlastností systémů než doposud uvažované metody. Doposud jsme předpokládali, že následující hodnoty výstupních a stavových proměnných systému jsou určeny - determinovány - současnými hodnotami stavu a vstupů. Matematicky je tato představa vyjádřena pomocí deterministických modelů ve tvaru diferenciálních rovnic. Explicitně vyjádřená derivace stavových proměnných přímo popisuje směr a velikost změn stavových proměnných, takže ze znalosti hodnot v daném čase jsme schopni určit (předpovědět) hodnoty proměnných modelů v čase následujícím.

Statistické metody identifikace nabízejí jiný pohled na dynamiku systému. Tyto metody předpokládají působení náhodných veličin na objekt, nebo že měřené veličiny jsou zatíženy šumem. K identifikaci systémů podle náhodných časových průběhů vstupních a výstupních signálů slouží metody statistické dynamiky jako korelační analýza, regresní analýza a jiné.

Na okamžité hodnoty systémových proměnných nahlížíme jako na okamžité hodnoty realizace náhodného procesu. Náhodný proces je funkce času, která může náhodně nabývat různých hodnot, přičemž není předem známo, které nabude. Vyhodnocení vlastností náhodných procesů je spojeno s vyhodnocováním velkých souborů měření na daném systému za stejných podmínek. Příčiny náhodných změn v jednotlivých souborech měření jsou na sobě nezávislé, takže okamžité hodnoty průběhů se navzájem liší. Příkladem různých náhodných procesů mohou být různé poruchové signály, kolísání napětí, šumy v elektrických obvodech, hluk vzniklý při turbulentním proudění apod.

Pokud bychom měřili a zaznamenávali graficky průběh náhodné veličiny, dostali bychom teoreticky nekonečně dlouhý záznam. Předpokládejme konečnou dobu měření a opakování měření za stejných podmínek. Po několika měřeních získáme grafický záznam podle obr. 41.



Obr. 41 Náhodný proces X(t) a několik jeho realizací

Náhodný proces *X(t)* je představován souborem průběhů. Jednotlivé průběhy náhodné veličiny $x_i\ (t)$, kde $i = 1,2,...n$ nazýváme realizacemi náhodného procesu *X(t)*.

Matematický popis vlastností náhodného procesu vychází z počtu pravděpodobnosti a statistiky. Vlastnosti náhodného procesu popisujeme pomocí **statistických charakteristik**, které dělíme do dvou skupin.

Statistické charakteristiky prvního řádu postihují pouze okamžité hodnoty náhodných veličin a nejsou schopny postihnout rychlost náhodných změn v průběhu realizace náhodného procesu. Patří mezi ně střední hodnota, rozptyl, směrodatná odchylka, distribuční funkce, hustota pravděpodobnosti.

Statistické charakteristiky druhého řádu popisují realizaci náhodného procesu a celý náhodný proces i z hlediska rychlosti probíhajících změn.

Σ Shrnutí pojmů

Statistická identifikace systému, náhodná veličina, náhodný proces, statické charakteristiky.

? Otázky

1. Co znamená statistická identifikace systému.
2. Definujte náhodný proces a náhodnou veličinu.
3. Charakterizujte statické charakteristiky.

4.1. Popis soustavy diferenční rovnicí a přenosem ve tvaru Z-obrazu

Čas ke studiu: 1,5 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat Z-transformaci.
- vysvětlit definiční vztah Z-transformace, rozdíl mezi L- transformací a Z-transformací.

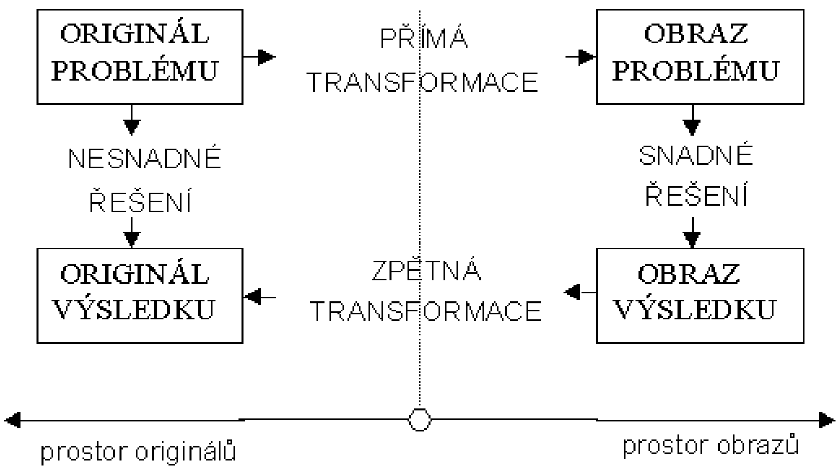
Výklad

Popis dynamických vlastností ve tvaru diferenční rovnice se často užívá při řešení problematiky stochastického modelování. Výhodou je snadné řešení na počítači, diferenční rovnice je algoritmus pro postupný výpočet odezvy, snadno se provádí odhad koeficientů metodou regresní analýzy. Hodnoty posloupností $\{u(kT)\}$ a $\{y(kT)\}$ potřebné pro odhad koeficientů získáme vyhodnocením vstupního spojitého signálu a odpovídající odezvy v diskrétních časových okamžicích $k = 0,1,2...$ nebo přímo měřením diskrétních hodnot za použití měřicí techniky.

4.2. Z- transformace

U některých dynamických systémů jsou signály vytvářeny nebo jsou měřeny (vzorkovány) v diskrétních časových okamžicích T (vzorkovací perioda), zpravidla stejně od sebe vzdálených. Takové dynamické systémy se nazývají diskrétní. V tomto případě se pracuje s diskrétními časovými funkcemi nebo časovými posloupnostmi.

Pří popisu, analýze a syntéze těchto systémů je nutno často řešit velmi složité diferenční rovnice. Ke zjednodušení těchto operací nám slouží Z - transformace (podobně jako u spojitých dynamických systémů L - transformace).



Obr. 42 Obecné schéma řešení problému pomocí transformace

Základní definiční vztah pro přímou Z - transformaci je:

$$Z\{x(kT)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} \tag{130}$$

kde z komplexní proměnná

kT diskrétní čas pro $k = 0,1,2,\ldots$

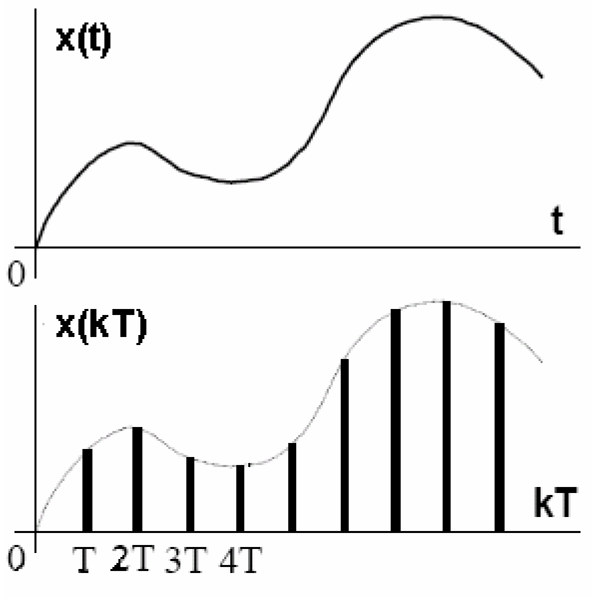
$x(kt)$ diskrétní originál, funkce definovaná v časové oblasti pro $k = 0,1,2\ldots$

$X(z)$ diskrétní obraz, komplexní funkce definovaná v oblasti komplexní proměnné z

Z operátor přímé Z-transformace

Z definičního vztahu Z-transformace je zřejmé, že zobrazuje funkci reálné proměnné $x(kT)$ na komplexní funkci komplexní proměnné $X(z)$. Hodnota originálu $x(kT)$ pro $k = 0, 1, 2,\ldots$ představuje ve fyzikálních interpretacích zpravidla velikost určité fyzikální veličiny v diskrétním časovém okamžiku kT. Protože čas kT je diskrétní, hovoříme o diskrétní transformaci a je tedy evidentní, že Z-transformace bude vhodná především pro diskrétní systémy, jejichž vlastnosti se dají vyjádřit pomocí lineárních diferenčních, sumačních a sumačně-diferenčních rovnic s konstantními koeficienty.

Diskrétní časovou funkci $x(kT)$ získáme ze spojité časové funkce $x(t)$ zastoupením spojitého času t diskrétním časem kT. Z obr. 44 je zřejmé, že jedné diskrétní funkci může odpovídat nekonečně mnoho různých spojitých funkcí, proto by vzorkovací perioda měla být co nejmenší, aby nevznikla při vyhodnocení měření příliš velká chyba.



Obr. 43 Vzorkování spojité časové funkce

Shrnutí pojmů

Z-transformace, definiční vztah Z-transformace.

Otázky

1. Charakterizujte princip a vlastnosti Z-transformace.
2. Charakterizujte diferenční rovnici.

4.3. Vztah mezi L a Z transformací

Čas ke studiu: x hodin

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat vztah mezi L a Z- transformací.
- popsat základní vlastnosti Z- transformace
- seznámíte se slovníkem Z-transformace, s diferenčními rovnicemi identifikovaných soustav.

Výklad

Porovnejme vztah pro L - transformaci se vztahem pro Z – transformaci:

$$L\{x(t)\} = X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt}dt \tag{131}$$

$$Z\{x(kT)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} \tag{132}$$

Nahradíme-li spojitý čas t diskrétním časem kT a spojitý integrál ve vztahu (131) diskrétním součtem (pro $T \to 0$, $T \cong dt$), dostaneme:

$$X(p) = T\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-pkT} \tag{133}$$

Srovnáním vztahů (132) a (133) platí, že $z = e^{pT}$ a dostáváme vztah mezi L a Z - transformací:

$$X(p) = \lim_{T \to 0} T\, X(z) \tag{134}$$

Stejně jako u L - transformace se výpočet Z - obrazů neprovádí výpočtem podle definičního vztahu (130), ale používá se slovník Z - transformace. Ve slovníku Z - transformace jsou obdobně jako u slovníku L - transformace uvedeny diskrétní funkce *x(kT)* a příslušný Z - obraz *X(z).* V daném řádku je uvedena také odpovídající spojitá funkce *x(t)*, z které se vzorkováním diskrétní funkce získala a její Laplaceův obraz *X(p).* Základní slovník Z - transformace je uveden v Příloze 2.

Příloha 2 – Základní slovník Z - transformace

$x(kT)$	$X(z)$	$x(kT)$	$X(z)$
$\delta(kT)$	1	kT	$\frac{T\,z}{(z-1)^2}$
$\eta(kT)$	$\frac{z}{z-1}$	k	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$\delta[(k-m)T]$	z^{-m}	$k\,a^k$	$\frac{a\,z}{(z-a)^2}$
$(\pm a)^k$	$\frac{z}{z\mp a}$	k^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$k\,(\pm a)^{k-1}$	$\frac{z}{(z\mp a)^2}$	$\binom{k-1}{n-1}(\pm a)^{k-n}$	$\frac{1}{(z\mp a)^n}$

Základní vlastnosti Z transformace

Základní vlastnosti Z transformace lze shrnout do následující tabulky:

Tabulka 4 Základní vlastnosti Z - transformace

Vlastnost	Funkce ve tvaru originálu	Funkce ve tvaru obrazu
Linearita - princip superpozice	$x_1(kT)+x_2(kT)+\ldots+x_n(kT)$	$X_1(z)+X_2(z)+\ldots+X_n(z)$
Násobení konstantou	$a\,x(kT)$	$a\,X(z)$
Posunutí v časové oblasti vpravo (zpoždění)	$x(k-n)T$	$z^{-n}\,X(z)$
Posunutí v časové oblasti vlevo (předstih)	$x(k+n)T$	$z^{n}\,X(z)$ *
Zpětná diference *n*-tého řádu	$\nabla^n x(kT)$	$\left(\frac{z-1}{z}\right)^n X(z)$
Sumace v časové oblasti (odpovídá zpět.diferenci)	$\sum_{i=0}^{k} x(iT)$	$\left(\frac{z}{z-1}\right)X(z)$

Poznámky: a - konstanta, * - počáteční podmínky musí být nulové

Diferenční rovnice

Tak jako základním tvarem matematického popisu spojitých systémů jsou diferenciální rovnice, tak základem matematického popisu diskrétních systémů jsou rovnice diferenční.

Základem diferenčních rovnic je pojem **diference funkce**. První diference je dána rozdílem dvou sousedních diskrétních hodnot. Přitom je možno použít dvou způsobů definování diferencí, a to dopřednou diferenci anebo zpětnou diferenci:

dopředná diference - funkce posunutá vlevo (předstih):

$$\Delta x(kT) = x[(k+1)T] - x(kT) \tag{135}$$

zpětná diference - funkce posunutá vpravo (zpoždění):

$$\nabla x(kT) = x(kT) - x[(k-1)T] \tag{136}$$

V obou případech je první diference analogií první derivace u spojitých funkcí (určuje rychlost změny funkce a geometricky je to směrnice tečny). Druhá diference (dopředná i zpětná) je zavedena vztahem

$$\Delta^2 x(kT) = \Delta x[(k+1)T] - \Delta x(kT) \tag{137}$$

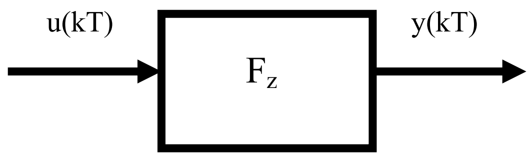
$$\nabla^2 x(kT) = \nabla x(kT) - \nabla x[(k-1)T] \tag{138}$$

a je možno ji vyčíslit z funkčních hodnot

$$\Delta^2 x(kT) = x[(k+2)T] - 2\,x[(k+1)T] - x(kT) \tag{139}$$

$$\nabla^2 x(kT) = x(kT) - 2\,x[(k-1)T] - x[(k-2)T] \tag{140}$$

Postupně můžeme zavést vyšší diference a vždy je možné je vyčíslit funkčními hodnotami (přitom platí, že řád diference je roven nejvyššímu posunutí u funkčních hodnot).



Obr. 45 Diskrétní systém

Lineární diferenční rovnici diskrétního systému n-tého řádu s konstantními koeficienty a s pravou stranou (obr. 45) můžeme napsat v tzv. diferenčním tvaru:

s dopřednými diferencemi

$$\alpha_n \Delta^n y(kT) + \ldots\ \alpha_1 \Delta y(kT) + \alpha_0\ y(kT) = \beta_m \Delta^m u(kT) + \ldots\ \beta_1 \Delta u(kT) + \beta_0\ u(kT) \tag{141}$$

se zpětnými diferencemi

$$\alpha_n \nabla^n y(kT) + \ldots\ \alpha_1 \nabla y(kT) + \alpha_0\ y(kT) = \beta_m \nabla^m u(kT) + \ldots\ \beta_1 \nabla u(kT) + \beta_0\ u(kT) \tag{142}$$

kde $u(kT)$ je známá vstupní diskrétní funkce systému,

$y(kT)$ je hledaná výstupní diskrétní funkce systému.

Jestliže v těchto diferenčních rovnicích nahradíme diference jejich funkčními hodnotami podle vztahů (135)-(140), sloučíme stejně posunuté funkce a zavedeme nové koeficienty a_i a b_i, dostaneme rekurentní tvar diferenční rovnice:

z dopředných diferencí:

$$a_n y[(k+n)T] + \ldots\ a_1 y[(k+1)T] + a_0\ y(kT) = b_m u[(k+m)T] + \ldots + b_0\ u(kT) \tag{143}$$

ze zpětných diferencí:

$$a_n y[(k-n)T] + \dots a_1 y[(k-1)T] + a_0\ y(kT) = b_m u[(k-m)T] + \dots + b_0\ u(kT) \tag{144}$$

Diferenční rovnice z dopředných diferencí (143) je uváděna jako diferenční rovnice s kladnými posunutími. Počáteční podmínky jsou zde dány funkčními hodnotami y(0), y(T), … y[(n-1)T]. Tento tvar je běžný v matematické literatuře, ale v regulační technice a v technické praxi vůbec se více užívá a je výhodnější druhý tvar (144) ze zpětných diferencí, který se nazývá tvar diferenční rovnice se zápornými posunutími. Počáteční podmínky jsou zde dány posloupností hodnot y(-T), y(-2T), … y(-nT) a tyto jsou většinou nulové. Koeficient a_0 u hodnoty $y(kT)$ bývá standardně normalizován na hodnotu 1, což umožňuje výhodně určit řešení $y(kT)$ numerickým způsobem. Jedná se o podělení celé rovnice tímto koeficientem (při numerickém řešení pak není třeba neustálého dělení koeficientem a_0).

Σ Shrnutí pojmů

Vztah mezi L a Z- transformací, základní vlastnosti Z- transformace, slovník Z-transformace, diferenční rovnice identifikovaných soustav.

? Otázky

1. Charakterizujte vztah mezi L-transformací a Z-transformací.
2. Uveďte základní vlastnosti Z-transformace.
3. Co znamená diference funkce.
4. Charakterizujte diferenční rovnici s dopřednou a zpětnou diferencí.

4.4. Z – přenos

Čas ke studiu: 0,4 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat Z-přenos.
- popsat význam Z-přenosu.

Výklad

Tak jako u lineárních spojitých systémů vyjadřujeme jejich popis pomocí přenosu v Laplaceově transformaci, můžeme vlastnosti diskrétních systémů vyjádřit pomocí Z – přenosu, který je definovaný jako poměr Z – obrazu výstupu a vstupu při nulových počátečních podmínkách. Z - přenos získáme převedením diferenční rovnice (144) do Z-transformace (z tabulek pro funkci posunutou vpravo platí vztah $Z\{x(k-n)\}=z^{-n}\,X(z)$):

$$a_n\, z^{-n}\, Y(z)+\, \dots\, a_1 z^{-1}\, Y(z)+ a_0\;\, Y(z)= b_m\, z^{-m}\, U(z)\, +\, \dots\, b_1 z^{-1}\, U(z)+ b_0\;\, U(z) \qquad (145)$$

$$G(z)=\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_m\,z^{-m}+.....b_1\,z^{-1}+b_0}{a_n\,z^{-n}+.....a_1\,z^{-1}+a_0}=\frac{\sum_{i=0}^{m}\bar{b}_i z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{n}a_i z^{-i}} \qquad (146)$$

kde $\bar{b}_i=\frac{b_i}{a_0}$

Z – přenos *G(z)* diskrétního systému sehrává stejnou úlohu jako přenos (Laplaceův) spojitého systému.

Shrnutí pojmů

Z-přenos, význam Z-přenosu

Otázky

1. Definujte Z-přenos a srovnejte jej s přenosem v L-transformaci.

5. NÁHODNÁ VELIČINA A NÁHODNÉ PROCESY

5.1. Základní pojmy z teorie pravděpodobnosti a statistiky dle normy ČSN ISO 3534

Čas ke studiu: 2 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat základní pojmy z oblasti pravděpodobnosti a statistiky,
- řešit základní příklady z této oblasti (stanovení distribuční funkce a dalších charakteristik).

Výklad

Základními pojmy teorie pravděpodobnosti jsou pokus a náhodný jev.

- *náhodný pokus (pokus)* - činnost, která se uskutečňuje za jistého, předem stanoveného systému podmínek. (Realizaci tohoto systému podmínek lze přitom neomezeně opakovat. Podle vlastní aktivity při přípravě systému podmínek rozlišujeme pokusy na *pozorování* - je omezeno na pouhé registrování skutečnosti a *experiment* - systém podmínek sami zajišťujeme).

- *jev* - výsledek pokusu, o němž má smysl uvažovat, zda nastal či nenastal (nastoupil či nenastoupil) a také každý jeho důsledek, značíme velkými tiskacími písmeny latinské abecedy *A, B, C*, ...

V teorii pravděpodobnosti se zabýváme výhradně

- *jevy hromadnými* - jevy, které jsou výsledky pokusů, jež lze za daného systému podmínek libovolněkrát, teoreticky nekonečně krát opakovat nebo které lze pozorovat na hromadně se vyskytujících předmětech téhož druhu. Rozlišujeme:

  - jevy jisté - systémem podmínek je vždy zaručeno uskutečnění jevu
  - jevy nemožné - systémem podmínek je uskutečnění jevu zcela vyloučeno
  - jevy náhodné - za daného systému podmínek mohou, ale nemusí nastat.

- *pravděpodobnost* - reálné číslo v rozsahu od 0 do 1 přiřazené náhodnému jevu (Může být ve vztahu k dlouhodobé relativní četnosti jevu nebo ke stupni důvěry, že jev nastane. Při vysokém stupni důvěry je pravděpodobnost blízká 1.)

- *klasická definice pravděpodobnosti* - nechť je dáno n elementárních jevů $E_1, E_2, \dots, E_n$, které tvoří úplnou skupinu jevů a jsou stejně možné (tyto jevy se obvykle označují jako všechny možné případy); rozkládá-li se jev A na m ($m \leq n$) elementárních jevů z této úplné skupiny (jsou označovány jako příznivé případy), pak pravděpodobnost jevu A je reálné číslo

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{147}$$

- *statistická definice pravděpodobnosti* - nechť A je hromadný jev, nastane-li v n pokusech jev A právě f_n-krát definujeme

$$P(A) = \lim_{n \to \infty}\left(\frac{f_n}{n}\right) \tag{148}$$

číslo f_n se nazývá absolutní četnost jevu A, podíl f_n k n relativní četnost jevu A při n pokusech.

Tuto vlastnost u statistické definice pravděpodobnosti označujeme jako *statistická stálost.*

Statistická definice pravděpodobnosti je založena na relativní četnosti jevu A. Opakujeme-li N-krát nezávisle nějaký pokus a nastane-li v těchto pokusech sledovaný jev m-krát, potom jeho relativní četnost je m/N. Jestliže při rostoucím počtu pokusů N bude pozorovaná relativní četnost jevu A kolísat stále v užších mezích kolem určitého čísla, můžeme předpokládat, že toto číslo je pravděpodobností jevu A.

Jev A nazýváme nezávislým od jevu B, když $P(A)$ nezávisí od toho, zda nastal či nenastal jev B. Příkladem je pokus, který spočívá v házení dvou mincí. Vyšetřují se jevy A – objevení znaku při hodu první mincí, B – objevení znaku při hodu druhou mincí. Jev A je nezávislým na jevu B.

Jev A nazýváme závislým na jevu B, když $P(A)$ se mění v závislosti na tom, zda nastal či nenastal jev B. Příkladem je následující pokus: v nádobě jsou dvě bílé a jedna černá kulička. Dvě osoby vybírají z nádoby po jedné kuličce a vyšetřují se jevy: A – vytažení bílé kuličky první osobou, B – vytažení bílé kuličky druhou osobou. Pravděpodobnost jevu A – pokud nenastal jev B je 2/3. Jestliže jev b nastal potom $P(A) = 1/2$, z čehož vyvozujeme, že jev A závisí na jevu B. Pravděpodobnost jevu A, vyčíslená při podmínce, že už nastal jev B, se nazývá podmíněnou pravděpodobností a značíme ji $P(A|B)$. V uvažovaném případě je tedy $P(A) = 2/3$ a $P(A|B) = 1/2$.

Podmínku nezávislosti jevu A od jevu B zapíšeme ve tvaru $P(A|B) = P(A)$.

Logickým součinem dvou jevů A a B nazýváme jev C, charakterizovaný tím, že se realizovaly oba jevy A i B. Značíme jej $P(A \cdot B)$.

Pro závislé náhodné jevy A a B je $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Pro nezávislé náhodné jevy je $P(B|A) = P(B)$, takže $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

5.2. Náhodná veličina

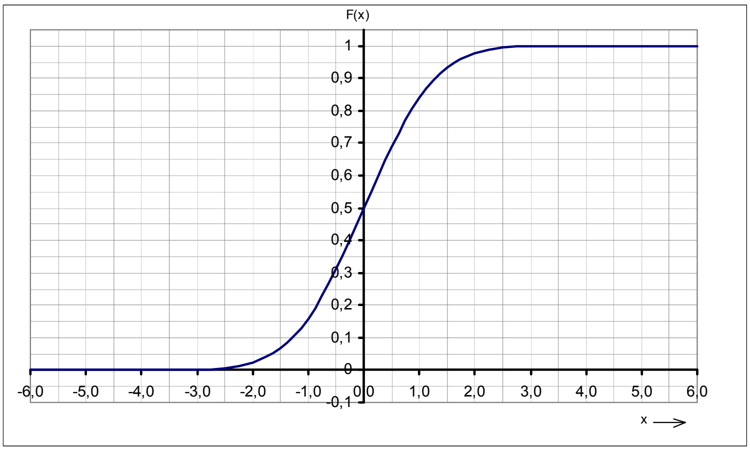
- *náhodná veličina* - veličina, která může nabývat jakoukoliv hodnotu z určité množiny hodnot a s níž je spojeno nějaké rozdělení pravděpodobnosti. Realizace náhodné veličiny je číslo přiřazené výsledku konkrétního pokusu. Značíme ji malými písmeny latinské abecedy. Zápis $X = x$ znamená, že náhodná veličina X nabyla v daném pokusu hodnoty x.)

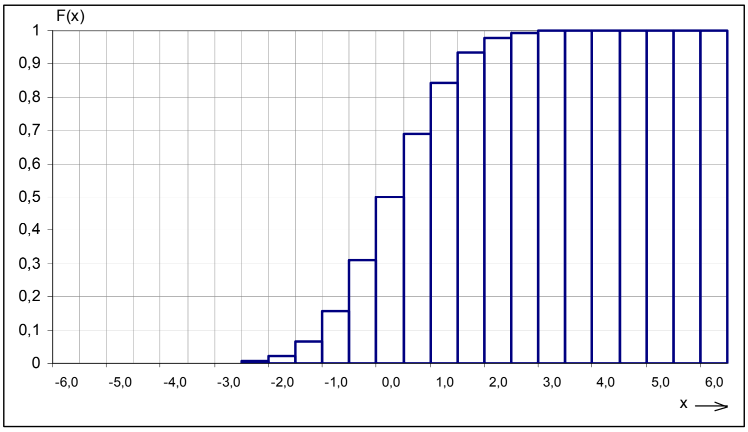
- *obor hodnot náhodné veličiny* - množina všech reálných čísel, kterých může náhodná veličina nabýt. Vzhledem k povaze oboru hodnot rozlišujeme dva základní druhy náhodných veličin:
  - diskrétní náhodná veličina - nabývá nejvýše spočetně mnoha reálných hodnot; jejím oborem hodnot je posloupnost (konečná nebo nekonečná)
  - spojitá náhodná veličina - nabývá nespočetně mnoha reálných hodnot; jejím oborem hodnot je interval (ohraničený nebo neohraničený)

- *rozdělení (pravděpodobností resp. náhodné veličiny)* - funkce udávající pravděpodobnost, že náhodná veličina nabývá dané hodnoty nebo patří do dané množiny hodnot. Pravděpodobnost množiny všech hodnot náhodné veličiny je rovna 1.

- *distribuční funkce* - funkce udávající pro každou hodnotu x pravděpodobnost, že náhodná veličina X bude menší nebo rovna x:

$$F(x) = P_r[X \leq x] \tag{149}$$

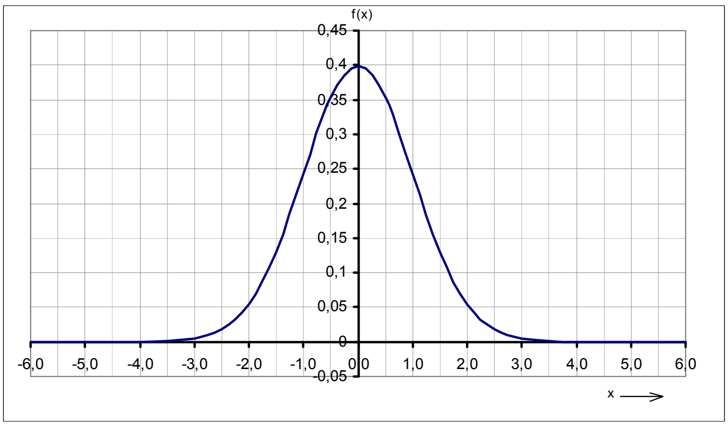




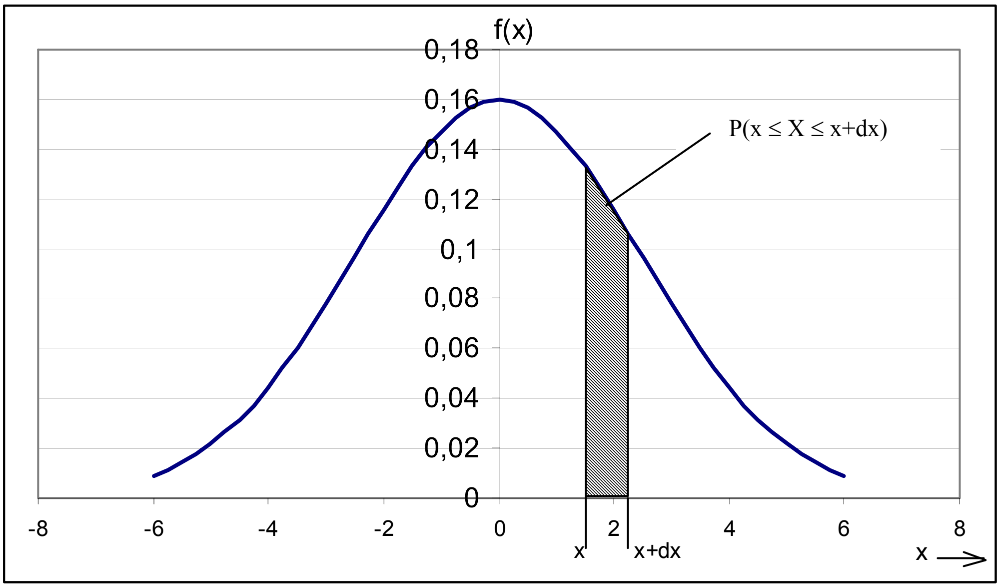
Obr. 45 Distribuční funkce spojité a diskrétní náhodné veličiny

- *hustota pravděpodobnosti (spojité náhodné veličiny)* - derivace (pokud existuje) distribuční funkce

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \tag{150}$$



Obr. 46 Hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny



Obr. 47 Pravděpodobnostní element

- *pravděpodobnostní element* – vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná veličina *x* leží v nekonečně malém intervalu $\langle x; x+dx \rangle$

$$P(x \leq X \leq x+dx) = \int_{x}^{x+dx} f(x) \cdot dx \tag{151}$$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \Rightarrow f(x) \cdot dx = dF(x) \tag{152}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1 \tag{153}$$

Například v intervalu $\langle -\infty; x_0 \rangle$ je
$$P(X \leq x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f(x) \cdot dx \tag{154}$$

- *pravděpodobnostní funkce (pro diskrétní náhodnou veličinu)* - funkce udávající pro každou hodnotu x_i diskrétní náhodné veličiny X pravděpodobnost p_i, že tato náhodná veličina je rovna x_i

$$p_i = P_r[X = x_i] \tag{155}$$

- *parametr* - veličina používaná při popisu rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny

- *kvantil (náhodné veličiny nebo rozdělení pravděpodobnosti)* - *p*-kvantil je hodnota náhodné veličiny, pro níž je distribuční funkce buď rovna *p* $(0 \leq p \leq 1)$, nebo tvoří „skok“ z hodnoty menší než *p* na hodnotu větší než *p*

Je-li distribuční funkce rovna p v celém intervalu mezi dvěma následnými hodnotami náhodné veličiny, lze kteroukoliv hodnotu z tohoto intervalu považovat za p-kvantil.

x_p je p-kvantil, jestliže:

$$P_r(X < x_p) \leq p \leq P_r(X \leq x_p) \tag{156}$$

V případě spojité náhodné veličiny je p-kvantil taková hodnota náhodné veličiny, pod níž leží podíl p rozdělení.

Analogicky se definuje procentní bod pouze s tím rozdílem, že p se vyjadřuje v procentech:

- *medián:* 0,5-kvantil
- *kvartil:* 0,25-kvantil nebo 0,75-kvantil
- *modus:* hodnota (hodnoty) náhodné veličiny, v níž (v nichž) pravděpodobnostní funkce diskrétní náhodné veličiny nebo hustota pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny nabývá lokálního maxima.
- *střední hodnota (náhodné veličiny nebo rozdělení pravděpodobnosti), očekávaná hodnota:*

Pro diskrétní náhodnou veličinu X nabývající hodnot x_i s pravděpodobnostmi p_i je střední hodnota (pokud existuje):

$$\mu = E(X) = \sum p_i \cdot x_i \tag{157}$$

přičemž součet se bere přes všechny hodnoty x_i, jichž může veličina X nabývat.

Pro spojitou náhodnou veličinu X mající hustotu pravděpodobnosti f(x) je střední hodnota (pokud existuje):

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \tag{158}$$

přičemž se integruje přes celý definiční interval (celé definiční intervaly) veličiny X.

Odhad střední hodnoty diskrétní náhodné veličiny

$$\mu = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} x(k) \tag{159}$$

- *centrovaná náhodná veličina:* - náhodná veličina, jejíž střední hodnota je rovna nule (náhodné veličině X se střední hodnou rovnou μ odpovídá centrovaná náhodná veličina X - μ).

$$\dot{X} = X - E(X) \tag{160}$$

Střední hodnota centrované náhodné veličiny $E\left[X - E(X)\right] = E\left[\dot{X}\right] = 0$

- *rozptyl (náhodné veličiny nebo rozdělení pravděpodobnosti)* - střední hodnota druhé mocniny centrované náhodné veličiny

$$\sigma^2 = V(X) = E[X - E(X)]^2 \tag{161}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left[x(k) - \mu_x\right]^2 \tag{162}$$

- *směrodatná odchylka (náhodné veličiny nebo rozdělení pravděpodobnosti)* - kladně vzatá druhá odmocnina z rozptylu

$$\sigma = \sqrt{V(X)} \tag{163}$$

- *variační koeficient (náhodné veličiny nebo rozdělení pravděpodobnosti)* - podíl směrodatné odchylky a střední hodnoty nezáporné náhodné veličiny

$$v = \frac{\sqrt{V(X)}}{E(X)} = \frac{\sigma}{\mu} \tag{164}$$

- *normovaná náhodná veličina* - náhodná veličina, jejíž střední hodnota je rovna nule a jejíž směrodatná odchylka je rovna 1.

Náhodné veličině X se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ odpovídá normovaná náhodná veličina

$$\frac{(X - \mu)}{\sigma} \tag{165}$$

Rozdělení normované náhodné veličiny se nazývá *normované rozdělení*.

Řešený příklad

Zadání

Při identifikaci systému bylo naměřeno 200 hodnot náhodné veličiny charakterizující vlastnosti daného systému - viz. následující tabulka – četnosti hodnot náhodné veličiny v hodinových intervalech.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N(t)	0	7	22	28	37	34	24	18	14	8	3	3	2

Řešení

Předpokládejme, že náhodná veličina je spojitá.

Určete empiricky průběhy základních vlastností náhodné veličiny – distribuční funkce, hustotu pravděpodobnosti spojité náhodné veličiny a vyneste graficky jejich časové průběhy.

$$R(t) = \frac{N - \sum_{0}^{t} N(t)}{N} \qquad F(t) = \frac{\sum_{0}^{t} N(t)}{N} \qquad f(t) \cong \frac{N(t)}{\Delta t \cdot N}$$

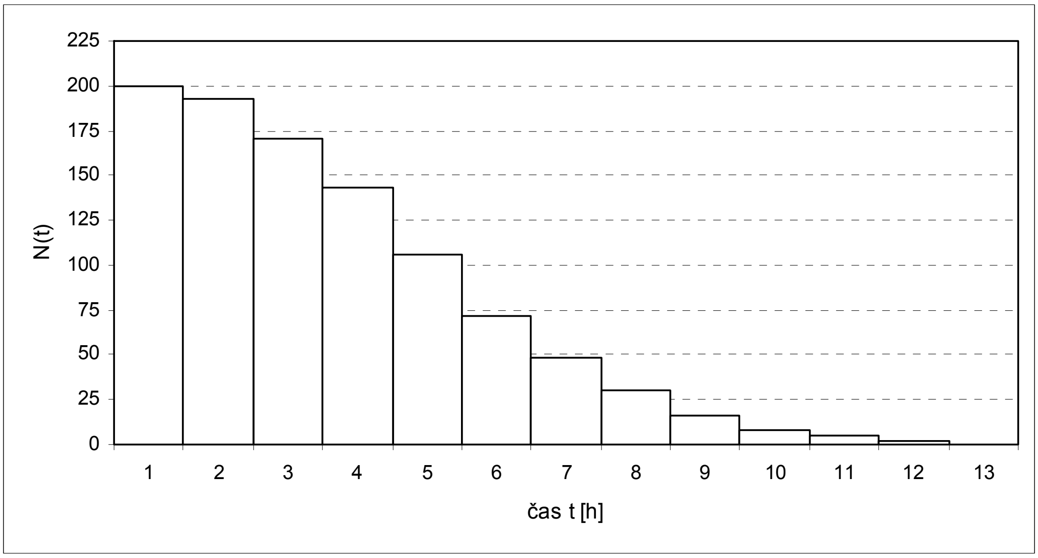
Kde N – celkový počet naměřených hodnot

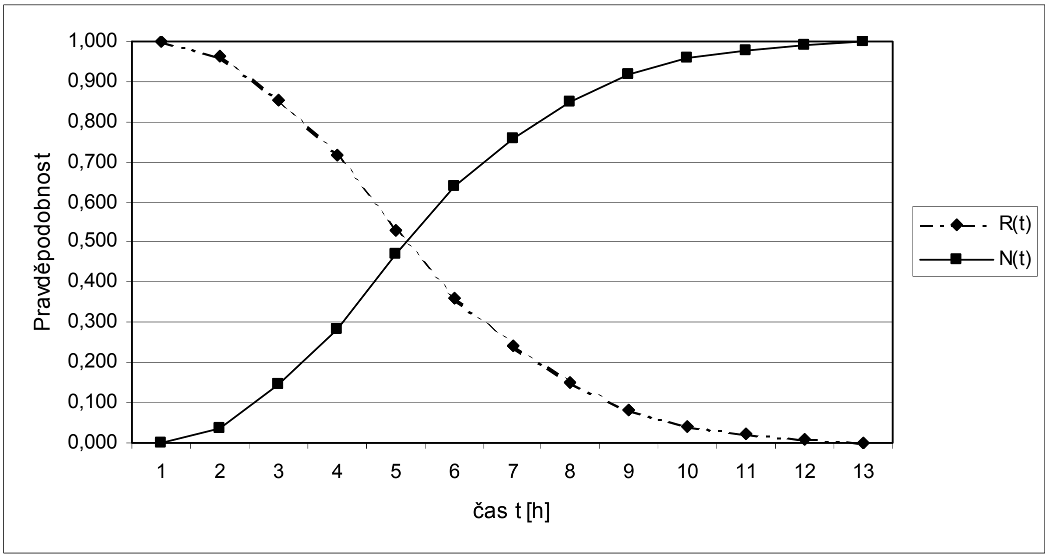
Δt – délka časového intervalu

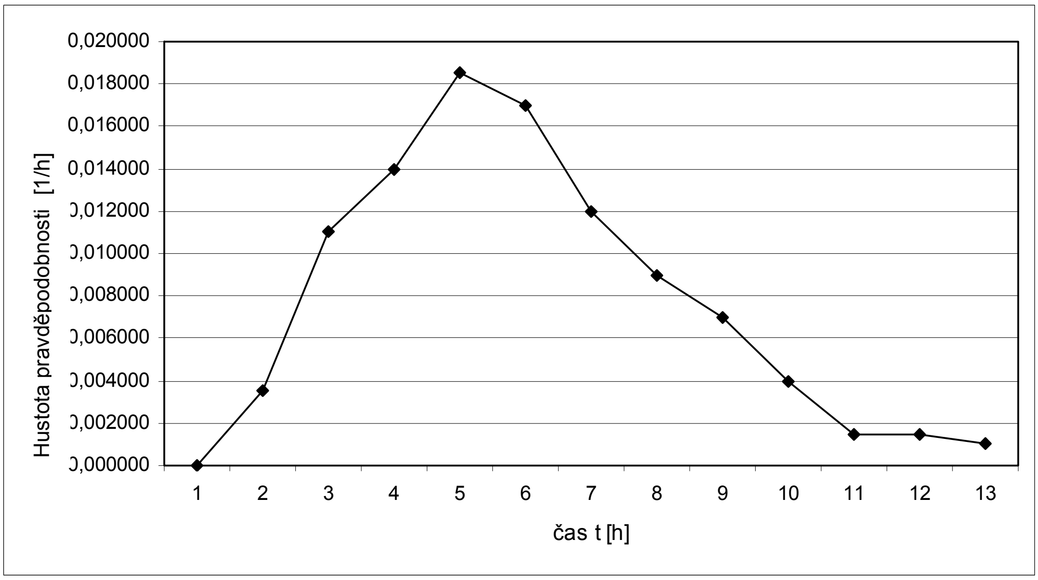
N(t) – četnosti hodnot náhodné veličiny v časových intervalech.

i	t	N(t)	R(t)	F(t)	f(t)
0	0	0	1,000	0,000	0,0000
1	1	7	0,965	0,035	0,0035
2	2	22	0,855	0,145	0,1100
3	3	28	0,715	0,285	0,1400
4	4	37	0,530	0,470	0,1850
5	5	34	0,360	0,640	0,1700
6	6	24	0,240	0,760	0,1200
7	7	18	0,150	0,850	0,0900

8	8	14	0,080	0,920	0,0700
9	9	8	0,040	0,960	0,0400
10	10	3	0,025	0,975	0,0150
11	11	3	0,010	0,990	0,0150
12	12	2	0,000	1,000	0,0100







Shrnutí pojmů

Základní pojmy z oblasti pravděpodobnosti a statistiky, stanovit základní příklady z této oblasti (stanovení distribuční funkce a dalších charakteristik).

Otázky

1. Definujte pojmy: náhodná veličina, obor hodnot, rozdělení pravděpodobnosti, distribuční funkce, hustota pravděpodobnosti a střední hodnota.

5.3. Vícerozměrové náhodné veličiny

Čas ke studiu: 2,5 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat charakteristiky vícerozměrné náhodné veličiny.
- stanovit vybrané charakteristiky vícerozměrné náhodné veličiny.

Výklad

Dvě náhodné veličiny X a Y tvoří systém dvou náhodných veličin (nebo též dvourozměrovou náhodnou veličinu). Hustota pravděpodobnosti dvourozměrové náhodné veličiny je prostorovým útvarem, nazýváme ji *sdruženou hustotou pravděpodobnosti* a označujeme symbolem $f(x,y)$.

Náhodná veličina X je nezávislá na náhodné veličině Y, jestliže zákon rozdělení proměnné X nezávisí na tom, jaké hodnoty nabyla proměnná Y. Analogicky k nezávislosti náhodných jevů platí:

$$f(x,y) = f(x) \cdot f(y) \tag{166}$$

Závislost resp. nezávislost proměnných je vzájemná. Střední hodnota součinu dvou nezávislých náhodných veličin je dána vztahem:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \tag{167}$$

Pro rozptyl součtu resp. rozdílu dvou nezávislých náhodných veličin platí:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \tag{168}$$

Střední hodnota součtu (rozdílu) dvou náhodných veličin:

$$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y) \tag{169}$$

Těsnost vazby (stupeň těsnosti lineární závislosti) mezi náhodnými veličinami X a Y udává tzv. *kovariance* (též tzv. *korelační moment*), která je definována jako střední hodnota součinu odchylek:

$$C(X,Y) = E\{[X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\} \tag{170}$$

Její odhad vypočteme ze vztahu:

$$C(X,Y) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left[x(k) - \mu_x \right] \cdot \left[y(k) - \mu_y \right] \quad (171)$$

Autokovariance je kovariance stejných náhodných veličin a je rovna rozptylu:

$$C(X,X) = E\left\{ \left[X - E(X) \right]^2 \right\} = \sigma^2 \quad (172)$$

V případě, že X a Y jsou nezávislé, je $C(X,Y)=0$. Je-li tedy kovariance dvou náhodných veličin různá od nuly, je to kritérium existence závislosti mezi nimi. Ze vztahu pro autokovarianci vyplývá, že kovariance charakterizuje nejen závislost náhodných veličin, ale i jejich rozptyl. Jestliže např. jedna z proměnných X,Y se velmi málo odchyluje od své střední hodnoty (je téměř nenáhodná), bude hodnota kovariance malá, i kdyby těsnost vazby mezi X a Y byla jakkoliv velká. Proto zavádíme bezrozměrnou charakteristiku, tzv. *koeficient korelace*:

$$r(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (173)$$

který nabývá hodnot z intervalu $\langle -1;1 \rangle$. Koeficient korelace vyjadřuje svojí absolutní hodnotou stupeň těsnosti lineární závislosti mezi náhodnými veličinami X a Y. V souvislosti se znaménkem + resp. – hovoříme o kladné resp. záporné korelaci proměnných X a Y. Kladná (záporná) korelace vyjadřuje, že při vzrůstu jedné z nich má druhá tendenci v průměru vzrůstat (klesat). Je-li koeficient korelace nulový, potom veličiny X a Y se nazývají nekorelované. Nezávislé náhodné veličiny jsou vždy nekorelované. Nekorelované však nemusí být vždy nezávislé. Podmínka nezávislosti je silnější než podmínka nekorelovatelnosti.

Řešený příklad

Zadání

Uvažujme 3 dvourozměrové náhodné veličiny $X,Y;\ X,\ Z$ a $X,W,$ jejichž měřením byly určeny následující hodnoty (Tabulka 5):

Tabulka 5 Náhodné veličiny X, Y, Z, W

	K	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	x(k)	-1,1	-0,7	-0,4	-0,2	-0,1	0,1	0,2	0,4	0,7	1,1
Y	y(k)	-0,4	-0,2	-1,1	-0,7	0,1	-0,1	0,7	1,1	0,2	0,4
Z	z(k)	1,1	0,7	0,4	0,2	0,1	-0,1	-0,2	-0,4	-0,7	-1,1
W	w(k)	0,55	0,35	0,2	0,1	0,05	-0,05	-0,1	-0,2	-0,35	-0,55

a) Vypočtěte odhady středních hodnot, rozptylů a směrodatných odchylek náhodných veličin $X,\ Y,\ Z$ a $W.$

b) Zhodnoťte těsnost vazby mezi náhodnými veličinami $X,Y;\ X,\ Z$ a $X,W.$

Řešení:

a) Odhad střední hodnoty náhodné veličiny X vypočteme ze vztahu:

$$\mu_x = \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{N} x(k) = \frac{1}{10}\cdot\left[-1{,}1-0{,}7-0{,}4-0{,}2-0{,}1+0{,}1+0{,}2+0{,}4+0{,}7+1{,}1\right] = 0$$

Obdobně zjistíme, že: $\mu_y = 0$, $\mu_z = 0$ a $\mu_w = 0$

Odhad rozptylu náhodné veličiny X vypočteme ze vztahu:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\cdot\sum_{k=1}^{N}\left[x(k)-\hat{\mu}_x\right]^2 = \frac{1}{10}\cdot\left[(-1{,}1-0)^2+(-0{,}7-0)^2+\cdots+(0{,}7-0)^2+(1{,}1-0)^2\right] = 0{,}382$$

Obdobně zjistíme, že: $\sigma_y^2 = 0{,}382$, $\sigma_z^2 = 0{,}382$, $\sigma_w^2 = 0{,}0955$

Odhad směrodatné odchylky zjistíme ze vztahu:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0{,}382} = 0{,}618$$

Obdobně: $\sigma_y = 0{,}618$, $\sigma_z = 0{,}618$ a $\sigma_w = 0{,}309$

Z hlediska středních hodnot jsou náhodné veličiny *X, Y, Z* a *W* totožné, rozptyl a směrodatná odchylka náhodné veličiny *W* se liší od stejných rozptylů a směrodatných odchylek náhodných veličin *X,Y* a *Z.*

b) Těsnost vazby mezi náhodnými veličinami *X,Y; X, Z* a *X,W* vyjadřuje kovariance a koeficient korelace:

Odhad kovariance vypočteme dle vztahu:

$$C(X,Y) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \left[x(k) - \hat{\mu}_x \right] \cdot \left[y(k) - \hat{\mu}_y \right] =$$

$$= \frac{1}{10} \begin{bmatrix} (-1{,}1-0)\cdot(-0{,}4-0)+(-0{,}7-0)\cdot(-0{,}2-0)+(-0{,}4-0)\cdot(-1{,}1-0)+ \\ (-0{,}2-0)\cdot(-0{,}7-0)+(-0{,}1-0)\cdot(0{,}1-0)+(0{,}1-0)\cdot(-0{,}1-0)+ \\ (0{,}2-0)\cdot(0{,}7-0)+(0{,}4-0)\cdot(1{,}1-0)+(0{,}7-0)\cdot(0{,}2-0)+ \\ (1{,}1-0)\cdot(0{,}4-0) \end{bmatrix} = 0{,}230$$

Analogicky: $C(X,Z) = -0{,}382$

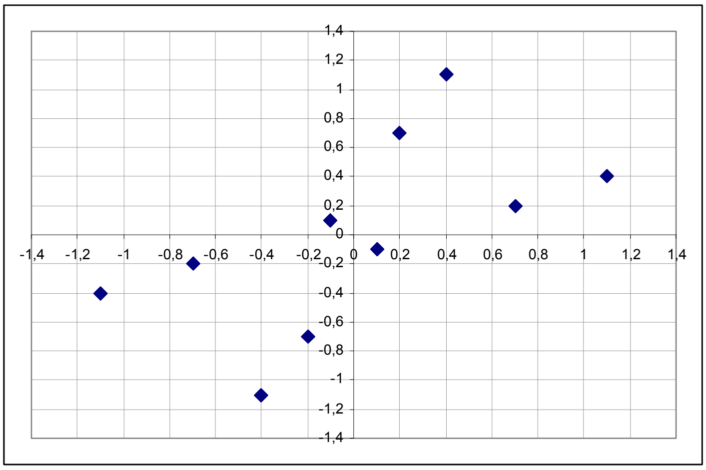
Z výsledků je zřejmé, že těsnost vazby mezi náhodnými veličinami *X,Z* je větší než mezi *X,Y*, jelikož $\left|C(X,Z)\right| > \left|C(X,Y)\right|$. Je to patrno i z porovnání závislostí *y(k)=f[x(k)]* a *z(k)=f[x(k)]*

Odhad koeficientů korelace:

$$r(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{0{,}230}{0{,}618 \cdot 0{,}618} = 0{,}6$$

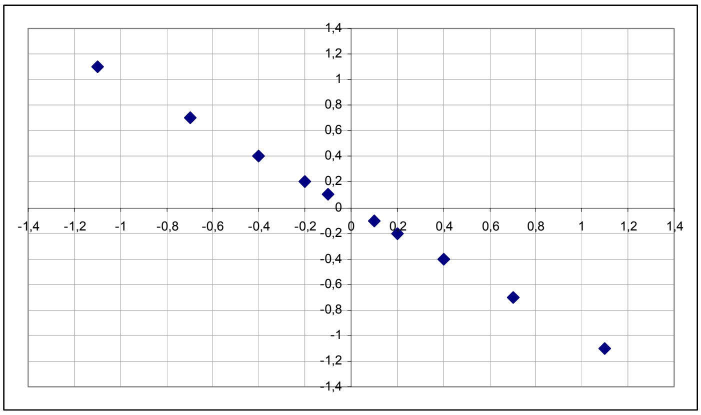
$$r(X,Z) = \frac{C(X,Z)}{\sigma_x \cdot \sigma_z} = \frac{-0{,}382}{0{,}618 \cdot 0{,}618} = -1$$

Závislost *y(k)=f[x(k)]*:



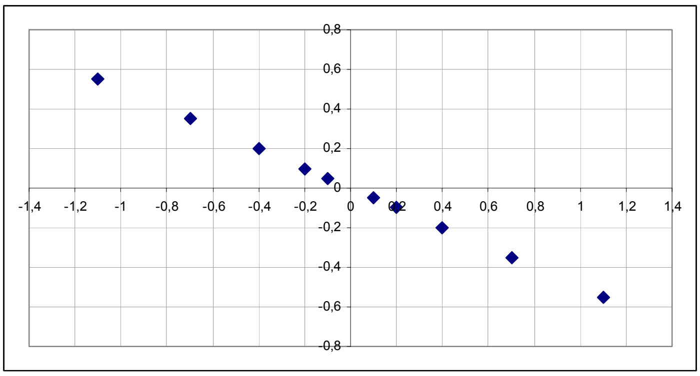
Obr. 48 Závislost *y(k)=f[x(k)]*

Závislost *z(k)=f[x(k)]*:



Obr. 49 Závislost *z(k)=f[x(k)]*

Závislost *w(k)=f[x(k)]*:



Obr. 50 Závislost *w(k)=f[x(k)]*

Z výše uvedených grafů a výsledků vyplývá, že kladná korelace proměnných X,Y vyjadřuje vzrůst náhodné veličiny Y při vzrůstu X (obr. 48) a záporná korelace proměnných X, Z vyjadřuje pokles Z při vzrůstu X (obr. 49).

Odhad kovariace a korelace náhodných veličin X,W:

$$C(X,W) = -0{,}191$$

$$r(X,W) = \frac{C(X,W)}{\sigma_x \cdot \sigma_w} = \frac{-0{,}191}{0{,}618 \cdot 0{,}309} = -1$$

Porovnání absolutních hodnot kovariancí $C(X,Y)$ a $C(X,W)$ by mohlo vést k chybnému závěru, že těsnost vazby mezi X a Y je větší než mezi X a W, kdybychom si neuvědomili, že $\sigma_w^2 < \sigma_y^2$.

Použijeme-li k hodnocení těsnosti vazby odhadů koeficientů korelace $r(X,Y)$ a $r(X,W)$, docházíme ke stejnému výsledku jako v předcházejícím případě, tzn. že dvourozměrové náhodné veličiny X, Z a X, W jsou z hlediska těsnosti lineární závislosti rovnocenné.

Závěrem lze tedy konstatovat, že těsnost vazby mezi náhodnými veličinami lze hodnotit prostřednictvím kovariancí pouze tehdy, jestliže rozptyly náhodných veličin jsou stejné.

Σ Shrnutí pojmů

Charakteristiky vícerozměrné náhodné veličiny, vybrané charakteristiky vícerozměrné náhodné veličiny (autokorelační funkce, koeficient korelace, kovariance, střední hodnota náhodné veličiny atd.)

Otázky

1. Charakterizujte sdruženou hustotou pravděpodobnosti.
2. Definujte pojmy kovariance a autokovariance a uveďte jejich rozdíly.

5.4. Kovarianční matice

Čas ke studiu: 2 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat kovarianční matici,
- sestavení a význam kovarianční matice.

Výklad

Při vysvětlování některých pojmů z teorie náhodných procesů a při řešení úloh experimentální identifikace soustav pracujeme s *N*-rozměrnou náhodnou veličinou neboli náhodným vektorem v následujícím tvaru:

$$\vec{Z}^T = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_2 & \cdots & Z_N \end{bmatrix} \tag{174}$$

jehož prvky jsou tvořeny náhodnými veličinami Z_i , $i = 1, 2, \ldots, N$. Náhodné veličiny Z_i jsou statisticky nezávislé, když:

$$f(z_1, z_2, \cdots, z_N) = f(z_1) \cdot f(z_2) \cdot \ldots \cdot f(z_N) \tag{175}$$

Pro střední hodnotu náhodného vektoru platí:

$$E(\vec{Z}) = \vec{\mu} \tag{176}$$

kde:

$$\vec{\mu}^T = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_N \end{bmatrix} \tag{177}$$

Rozptyly spolu s kovariancemi zapisujeme obvykle ve formě *kovarianční matice* $\vec{C}(\vec{Z})$ náhodného vektoru $\vec{Z}$, která je dána vztahem:

$$\vec{C}(\vec{Z}) = E(\dot{\vec{Z}} \ \dot{\vec{Z}}^T) \tag{178}$$

Pro $\vec{C}(\vec{Z})$ tedy platí:

$$\vec{C}(Z)=E\left\{\begin{bmatrix}\dot{Z}_1\\ \dot{Z}_2\\ \vdots\\ \dot{Z}_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{Z}_1 & \dot{Z}_2 & \dots & \dot{Z}_N\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}E(\dot{Z}_1\,\dot{Z}_1) & E(\dot{Z}_1\,\dot{Z}_2) & \cdots & E(\dot{Z}_1\,\dot{Z}_N)\\ E(\dot{Z}_2\,\dot{Z}_1) & E(\dot{Z}_2\,\dot{Z}_2) & \cdots & E(\dot{Z}_2\,\dot{Z}_N)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ E(\dot{Z}_N\,\dot{Z}_1) & E(\dot{Z}_N\,\dot{Z}_2) & \cdots & E(\dot{Z}_N\,\dot{Z}_N)\end{bmatrix}$$

$$\vec{C}(\vec{Z})=\begin{bmatrix}C(Z_1\,Z_1) & C(Z_1\,Z_2) & \cdots & C(Z_1\,Z_N)\\ C(Z_2\,Z_1) & C(Z_2\,Z_2) & \cdots & C(Z_2\,Z_N)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C(Z_N\,Z_1) & C(Z_N\,Z_2) & \cdots & C(Z_N\,Z_N)\end{bmatrix} \tag{179}$$

Kovarianční matice $\vec{C}(\vec{Z})$ je maticí symetrickou, na její diagonále nalezneme rozptyly náhodných veličin Z_i , neboť $\vec{C}(Z_i, Z_i)=\sigma_i^2$.

Pokud $\vec{C}(Z_i, Z_j)=0$ a $i \neq j$ jsou náhodné veličiny párově nezávislé a tudíž nekorelované. Pro hustoty pravděpodobnosti v tomto případě platí:

$$\begin{aligned} f(z_1,z_2) &= f(z_1)\cdot f(z_2)\\ \vdots \qquad & \qquad \vdots\\ f(z_1,z_N) &= f(z_1)\cdot f(z_N)\end{aligned} \tag{180}$$

Sdružená hustota pravděpodobnosti N-rozměrné náhodné veličiny $\vec{Z}$ s normálním rozdělením je rovna:

$$f(\vec{Z})=\frac{1}{\sqrt{(2\Pi)^N\cdot\left|\vec{C}(\vec{Z})\right|}}\,exp\,\frac{\left(\vec{Z}-\vec{\mu}\right)^T\cdot\vec{C}^{-1}(\vec{Z})\cdot\left(\vec{Z}-\vec{\mu}\right)}{2} \tag{181}$$

Řešený příklad

Zadání

Je dán náhodný vektor $\vec{X}^T = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_7 \end{bmatrix}$. Konkrétní hodnoty $x_i(k)$, *pro* $i = 1, 2, \dots, 7;\ k = 1, 2, \dots, 12$ náhodných veličin X_i jsou uvedeny v tabulce 6.

a) Určete odhad střední hodnoty náhodného vektoru $\vec{X}$.

b) Sestavte kovarianční matici náhodného vektoru $\vec{X}$.

Tabulka 6 Data k příkladu

	X_1	X_2	X_3	X_4	X5	X_6	X_7
K	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$x_3(k)$	$x_4(k)$	$x_5(k)$	$x_6(k)$	$x_7(k)$
1	0,64	0,74	0,62	0,59	0,35	-0,09	-0,39
2	0,54	0,37	0,06	-0,32	-0,60	-0,69	-0,67
3	0,34	0,50	0,37	0,26	-0,52	-0,72	0,42
4	0,23	0,26	0,35	0,55	0,69	0,75	0,80
5	0,12	0,20	0,24	0,18	-0,20	-0,42	-0,46
6	-0,16	-0,12	-0,15	0,05	0,29	0,43	0,63
7	-0,22	-0,29	-0,38	-0.24	-0,06	0,07	-0,16
8	-0,26	-0,69	-0,70	-0,61	-0,43	-0,22	0,29
9	-0,50	-0,60	-0,68	-0,62	-0,68	-0,56	-0,54
10	-0,30	0,13	0,75	0,84	0,78	0,73	0,71
11	-0,69	-0,40	0,08	0,16	0,12	0,18	0,33
12	0,18	-0,79	-0,56	-0,39	-0,42	-0,58	-0,53

Řešení

a) Odhad střední hodnoty náhodného vektoru:

$$\mu^T = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 & \hat{\mu}_2 & \dots & \hat{\mu}_7 \end{bmatrix}$$

kde

$$\mu_i = \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=1}^{12} x_i(k) \qquad i = 1, 2, \dots, 7$$

Odhad střední hodnoty náhodné veličiny X_1 po dosazení dat z tabulky:

$$\mu_1 = \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=1}^{12} x_1(k) = \frac{1}{12} \cdot \left[0{,}64 + 0{,}54 + 0{,}34 + 0{,}23 + 0{,}12 - 0{,}16 - 0{,}22 - 0{,}26 - 0{,}50 - 0{,}30 - 0{,}69 + 0{,}18\right] =$$
$$= -0{,}007$$
$$\mu_2 = \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=1}^{12} x_2(k) = \frac{1}{12} \cdot \left[0{,}74 + 0{,}37 + 0{,}50 + 0{,}26 + 0{,}20 - 0{,}12 - 0{,}29 - 0{,}69 - 0{,}60 + 0{,}13 - 0{,}40 - 0{,}78\right] =$$
$$= -0{,}057$$

atd.

Náhodný vektor $\vec{X}$ má střední hodnotu:

$$\mu^T = \left[-0{,}007 \quad -0{,}057 \quad 0{,}000 \quad 0{,}037 \quad -0{,}057 \quad -0{,}093 \quad 0{,}036\right]$$

b) Odhad kovarianční matice náhodného vektoru $\vec{X}$:

$$\vec{C}(\vec{X}) = \begin{bmatrix} \widehat{C}(X_1\ X_1) & \widehat{C}(X_1\ X_2) & \cdots & \widehat{C}(X_1\ X_N) \\ \widehat{C}(X_2\ X_1) & \widehat{C}(X_2\ X_2) & \cdots & \widehat{C}(X_2\ X_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \widehat{C}(X_N\ X_1) & \widehat{C}(X_N\ X_2) & \cdots & \widehat{C}(X_N\ X_N) \end{bmatrix}$$

kde

$$\widehat{C}(X_1, X_1) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=1}^{12} \left[x_1(k) - \widehat{\mu}_1\right]^2$$

Dosazením hodnot z tabulky dostáváme:

$$C(X_1, X_1) = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} (0{,}64 + 0{,}007)^2 + (0{,}54 + 0{,}007)^2 + (0{,}34 + 0{,}007)^2 + (0{,}23 + 0{,}007)^2 + \\ + (0{,}12 + 0{,}007)^2 + (-0{,}16 + 0{,}007)^2 + (-0{,}22 + 0{,}007)^2 + (-0{,}26 + 0{,}007)^2 + \\ + (-0{,}50 + 0{,}007)^2 + (-0{,}30 + 0{,}007)^2 + (0{,}69 + 0{,}007)^2 + (0{,}18 + 0{,}007)^2 \end{bmatrix}$$
$$= 0{,}1632$$
$$C(X_2, X_2) = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} (0{,}74 + 0{,}057)^2 + (0{,}37 + 0{,}057)^2 + (0{,}50 + 0{,}057)^2 + (0{,}26 + 0{,}057)^2 + \\ + (0{,}20 + 0{,}057)^2 + (-0{,}12 + 0{,}057)^2 + (-0{,}29 + 0{,}057)^2 + (-0{,}69 + 0{,}057)^2 + \\ + (-0{,}60 + 0{,}057)^2 + (0{,}13 + 0{,}057)^2 + (-0{,}40 + 0{,}057)^2 + (-0{,}79 + 0{,}057)^2 \end{bmatrix}$$
$$= 0{,}2385$$

atd.

Dále pak:

$$C(X_1, X_2) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=1}^{12} \left[x_1(k) - \widehat{\mu}_1\right] \cdot \left[x_2(k) - \widehat{\mu}_2\right]$$

Dosazením hodnot z tabulky dostáváme

$$C(X_1,X_2)=\frac{1}{12}\cdot\left[\begin{array}{l}(0{,}64+0{,}007)\cdot(0{,}74+0{,}057)+(0{,}54+0{,}007)\cdot(0{,}37+0{,}057)+\\+(0{,}34+0{,}007)\cdot(0{,}50+0{,}057)+(0{,}23+0{,}007)\cdot(0{,}26+0{,}057)+\\+(0{,}12+0{,}007)\cdot(0{,}20+0{,}057)+(-0{,}16+0{,}007)\cdot(-0{,}12+0{,}057)+\\(-0{,}22+0{,}007)\cdot(-0{,}29+0{,}057)+(-0{,}26+0{,}007)\cdot(-0{,}69+0{,}057)+\\(-0{,}50+0{,}007)\cdot(-0{,}60+0{,}057)+(-0{,}30+0{,}007)\cdot(0{,}13+0{,}057)+\\+(0{,}69+0{,}007)\cdot(-0{,}40+0{,}057)+(0{,}18+0{,}007)\cdot(-0{,}79+0{,}057)\end{array}\right]$$

$$=0{,}1379$$

atd.

Kovarianční matice náhodného vektoru $\vec{X}$ má pak následující tvar.

$$C(\vec{X})=\begin{bmatrix}0{,}1632 & 0{,}1379 & 0{,}0795 & 0{,}0457 & -0{,}0106 & -0{,}0642 & -0{,}0648\\ . & 0{,}2385 & 0{,}2029 & 0{,}1621 & 0{,}0827 & 0{,}0229 & 0{,}0251\\ . & . & 0{,}2356 & 0{,}2152 & 0{,}1527 & 0{,}0982 & 0{,}0896\\ . & . & . & 0{,}2207 & 0{,}1910 & 0{,}1491 & 0{,}1322\\ . & . & . & . & 0{,}2407 & 0{,}2348 & 0{,}1711\\ . & . & . & . & . & 0{,}2691 & 0{,}2114\\ . & . & . & . & . & . & 0{,}2878\end{bmatrix}$$

Prvky na hlavní diagonále jsou výrazem rozptylu náhodných veličin X_i.

Shrnutí pojmů

Kovarianční matice, sestavení a význam kovarianční matice.

Otázky

1. Popište postup vytváření kovarianční matice a uveďte její význam.

5.5. Stacionárnost a ergodičnost náhodného procesu.

(SENP – stacionární a ergodický náhodný proces)

Čas ke studiu: 3 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat stacionárnost a ergodičnost náhodného procesu.
- určit korelační funkce a výkonové spektrální hustoty.

Výklad

Pokud při změně počátku, od něhož odečítáme čas, je střední hodnota a rozptyl konstantní $\sigma_x^2(t) = \tau_x = k_1; \mu_x(t) = \mu_x = k_2$ a autokorelační funkce je pouze funkcí posunutí τ - hovoříme o stacionárnosti v širším smyslu.

Stacionárnost v užším smyslu předpokládá rovnost hustot pravděpodobností při změně počátku od něhož odečítáme čas.

Říkáme, že stacionární náhodné procesy jsou invariantní vůči změně počátku časové osy.

Náhodný proces *X(t)* nazýváme ergodickým, jestliže střední hodnota, rozptyl a autokorelační funkce určené v souboru realizací se s pravděpodobností blízkou jedné rovnají charakteristikám určeným z jediné realizace $x^{(1)}(t)$. Přitom teoretické vztahy pro určení těchto charakteristik z jediné realizace předpokládají výpočet zaznamenaný v intervalu $(-\infty, \infty)$ – v praxi se předpokládá záznam pro dostatečně dlouhou dobu.

Čili střední hodnota v souboru realizací a střední hodnota v jediné realizaci

$$\mu_x = \lim \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^{(1)}(t)dt \qquad (182)$$

se sobě rovnají.

Podobně pro autokorelační funkci realizace platí

$$Rx^{(1)}x^{(1)}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x^{(1)}(t) \cdot x^{(1)}(t+\tau)dt \qquad (182)$$

Pro autokorelační funkci centrovaného náhodného procesu – autokovariační funkci platí

$$Cx_x^{(x)} x^{(1)}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} [x^{(1)}(t) - \mu_x^{(1)}][(x^{(1)}(t+\tau) - \mu_x^{(1)}]dt \tag{183}$$

Pro zjednodušení dalšího výkladu zápisu budeme nadále vyšetřovanou realizaci označovat *x(t)* a hovořit o korelačních funkcích. Vztahy, ke kterým dospějeme budou stejné i pro centrované realizace. V praxi se převážně pracuje s centrovanou realizací [1],[5].

Pro autokorelační funkci realizace SENP z konečné doby záznamu lze psát

$$Rxx(\tau) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t) \cdot x(t+\tau)dt \tag{184}$$

a je to v podstatě odhad skutečného průběhu autokorelační funkce. Autokorelační funkce charakterizuje vzájemný vztah (souvislost) mezi hodnotami téže náhodné realizace. Umožňuje ze znalosti funkce v minulém čase statisticky předvídat její další chování.

Pro střední hodnotu realizace platí:

$$\mu_x = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x^{(n)}(t)dt \tag{185}$$

Analogicky lze definovat vzájemnou korelační funkci realizací dvou SENP *x(t)* a *y(t)*.

Pro konečnou dobu záznamu lze psát

$$Rxy(\tau) = \frac{1}{T} \int_{0}^{T} x(t).y(t+\tau)dt \tag{186}$$

Tato funkce vyjadřuje míru korelace mezi veličinou *x(t)* v okamžiku *t* a *y(t+τ)*. Jestliže korelace existuje, např. vztah příčiny a následku se zpožděním τ_0 , má korelační funkce maximum pro $\tau = \tau_0$.

Nejdůležitější vlastnosti autokorelační funkce jsou:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{Rxx}\ (\tau) = 0$

b) $Rxx(\tau) = Rxx(-\tau)$

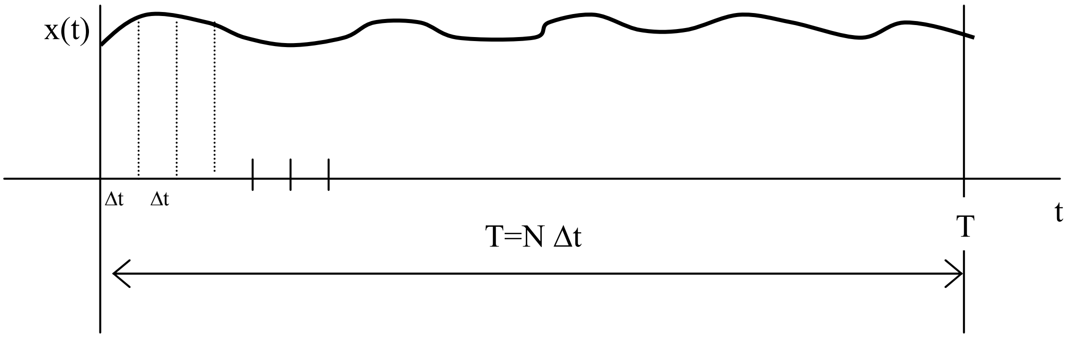
c) $Rxx(\sigma^2)$ je rovna střední hodnotě kvadrátu realizace nebo rozptylu u centrované realizace.

Pro vzájemné korelační funkce platí

$$Rx,y(\tau) = Ry,x(\tau) \tag{187}$$

Určení korelačních funkcí a výkonových spektrálních hustot.

Mějme záznam realizace *x(t)* v intervalu *(0,T)* podle obr.51



Obr.51 Záznam realizace

Rozdělíme graf na úseky $\Delta t = \dfrac{T}{N}$

Hodnotám *t* a τ přisoudíme diskrétní hodnoty *k* a *i* násobené *Δt*

$$t = k.\,\Delta t \qquad k = 1, 2... \qquad \tau = i\,\Delta\,t \qquad i = 0, 1, 2, ...$$

$$Rxx\ (i\ \Delta\ t) = Rxx\ (i);\ \ x\ (k\ .\ \Delta\ t) = x\ (k)\ ;\quad x[(k+i)\ \Delta t] = x\ (k+i) \tag{188}$$

Pak pro vyčíslení korelačních funkcí užijeme vztahů

$$Rxx(i) = \frac{1}{N-i}\sum_{k=1}^{N-i} x(k).x(k+i) \tag{189}$$

$$Rxy(i) = \frac{1}{N-i}\sum_{k=1}^{N-i} x(k).y(k+i) \tag{190}$$

Při vyhodnocování je třeba se zabývat:

- volbou intervalu *Δt,*
- volbou minimálního počtu pořadnic i autokorelační funkce,
- volba doby záznamu *T.*

Pro volbu *Δt* platí $\Delta t < \dfrac{1}{2fc}$, kde *fc* je mezní kmitočet obsažený v realizaci.

Počet pořadnic se doporučuje volit $i \langle \dfrac{1}{5} N$

Je-li v realizaci periodická složka o velikosti T_0 se doporučuje volit $T = N.\ \Delta t$ asi $10\ T_0$.

Pro vyhodnocování výkonových spektrálních hodnot se užívá spektrálních analyzátorů.

Výkonová spektrální hustota

Analogicky k předcházejícímu výkladu lze definovat u SENP výkonovou spektrální hustotu realizace *x(t)* náhodného procesu *X(t)* takto:

$$Sxx(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left| X(j\omega) \right|^2 \tag{191}$$

kde *X(jω)* je Fourierova transformace realizace *x(t)* náhodného procesu *X(t)*.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{192}$$

Odhad výkonové spektrální hustoty realizace ze záznamu o konečné délce

$$Sxx(\varpi) = \frac{1}{T} \left| X(j\varpi) \right|^2 \tag{193}$$

Obdobně vzájemnou spektrální hustotu realizací *x(t)* a *y(t)* lze vyjádřit

$$Sxy(j\varpi) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} X^*(j\omega).Y(j\omega) \tag{194}$$

kde *X*(jω)* je komplexně sdružený výraz k Fourierově transformaci *X(jω)* realizace *x(t)*. Je to číslo komplexní.

Vzájemný vztah mezi korelačními funkcemi a výkonovými spektrálními hodnotami vyjadřují rovnice Wiener – Chinčinovy.

Výkonová spektrální hustota je Fourierovým obrazem autokorelační funkce

$$Sxx(\varpi) = \int_{-\infty}^{\infty} Rxx(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \tag{195}$$

Autokorelační funkce je originálem k Fourierově obrazu

$$Rxx(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Sxx(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \tag{196}$$

Výkonová spektrální hustota má fyzikální interpretaci jako 2π násobek derivace výkonu podle frekvence, rozptýlené v odporu 1Ω považujeme-li *x(t)* za náhodnou veličinu proudu procházející odporem

$$Sxx(\omega) = 2\pi \frac{dP}{d\omega} \tag{197}$$

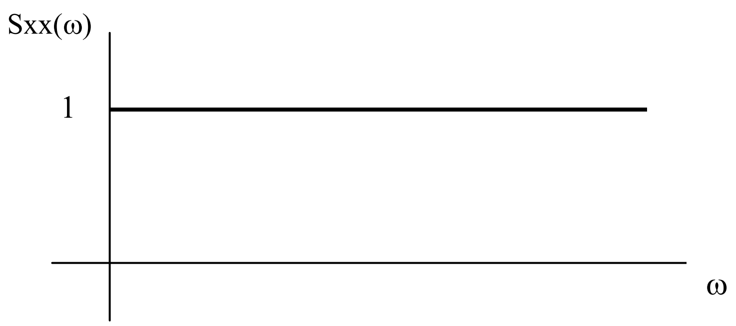
V této souvislosti se zmíníme o náhodné veličině, jejíž autokorelační funkce má tvar Diracova impulsu v čase $\tau = 0$. Výkonová spektrální hustota této náhodné veličiny pro $\tau = 0$ je:

$$Sxx(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) e^{-j\omega 0} d\tau \tag{198}$$

platí, že $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(0) d\tau = 1$ a

$$\text{Sxx}\ (\omega) = 1. \tag{199}$$

Výkonová spektrální hustota náhodné veličiny jejíž autokorelační funkce je rovna Diracovu impulsu je konstantní a takovou veličinu nazýváme bílý šum (obr.51). Přesná realizace není možná, museli bychom mít nekonečný zdroj energie. Lze však realizovat aproximaci bílého šumu s omezeným frekvenčním pásmem.



Obr. 52 Charakteristika bílého šumu

Shrnutí pojmů

Stacionárnost a ergodičnost náhodného procesu, stanovení korelační funkce a výkonové spektrální hustoty.

Otázky

1. Definujte ergodičnost a stacionárnost náhodného procesu.
2. Charakterizujte stanovení korelační funkce náhodného procesu a výkonové spektrální hustoty náhodného procesu.

5.6. Bílý šum

Čas ke studiu: 0,75 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- charakterizovat bílý šum
- popsat korelovaný a nekorelovaný šum.

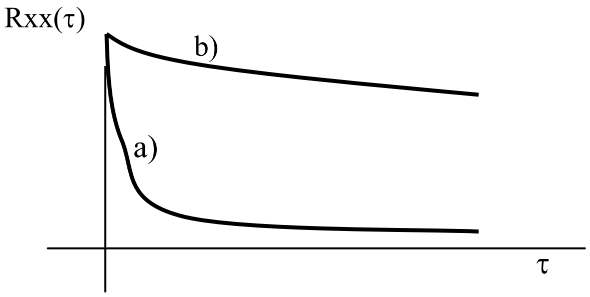
Výklad

Jak bylo již dříve naznačeno na každou identifikovatelnou soustavu působí v průběhu času měření nějaký rušivý signál. Tento signál se nazývá šum.

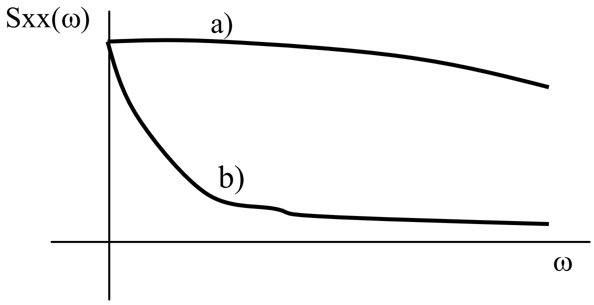
Bílý šum je náhodný signál se zvláštními vlastnostmi (white noise). Přestože tento signál je jen matematická abstrakce, je možné pomocí něj modelovat náhodné chyby, jejichž základní charakteristikou je úplná nahodilost a žádná korelace mezi vzájemně časově posunutými hodnotami. Další uplatnění má při popisu přenosových vlastností lineárních dynamických systémů.

Bílý šum se vyznačuje tím, že hodnoty v každých dvou okamžicích i libovolně blízkých jsou nekorelované.

V praxi mohou být korelační funkce šumů na vstupu systémů více nebo méně blízké Diracovu impulsu.



Obr. 53 Autokorelační funkce šumů



Obr. 54 Výkonová spektrální hustota šumů

pak v případě ad a) hovoříme o šumu nekorelovaném, v případě ad b) hovoříme o šumu korelovaném.

Při diskrétním vyjádření korelační funkce

$$Rxx(i) = \frac{1}{N-i}\sum_{k=1}^{N-i} x(k)x(k+i) \tag{200}$$

lze psát pro nekorelovaný šum $\mu_x = 0,\ \sigma_x^2 = konst.$

$Rxx(i) = \sigma_x^2$ *pro* $i = 0$

0 *pro* $i \geq 1$

pro korelovaný šum $\mu_x = 0,\ \sigma_x^2 = konst.$

$Rxx(i) = \sigma_x^2$ *pro* $i = 0$

různé od 0 *pro* $i \geq 1$

Za nekorelovaný šum lze považovat posloupnost čísel, které nejsou sice vytvářeny náhodně, mají však vlastnosti náhodných čísel. Hovoříme o pseudonáhodném signálu, který při identifikaci zavádíme na vstup identifikované soustavy.

K tomu se užívá kruhového pomocného registru na kterém se vytváří lineární posloupnost hodnot *„0“* a *„1“* opakující se s určitou periodu P_T.

Σ Shrnutí pojmů

Bílý šum, korelovaný a nekorelovaný šum, autokorelační funkce šumu, výkonová spektrální hustota šumu.

? Otázky

1. Charakterizujte bílý šum
2. Popište nekorelovaný a korelovaný šum.

5.7. Průchod realizace SENP lineární soustavou

Čas ke studiu: 1 hodina

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat průchod realizace stacionárního a ergodického náhodného procesu lineární soustavou.
- seznamíte se s Wiener-Hopfovou rovnicí.

Výklad

Předpokládejme, že na vstup lineární soustavy s váhovou funkcí *g(t)* přivedeme realizaci u*(t)* náhodného procesu, která je u*(t)* $\neq 0$ pro všechna *t*. Pak průběh odezvy *y(t)* určíme z konvolutorního integrálu [7],[12]:

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda \tag{201}$$

Pro argument *(t + τ)* lze uvedenou rovnici napsat ve tvaru

$$y(t+\tau) = \int_{0}^{\infty} g(\eta)\cdot u(t+\tau-\eta)d\eta \tag{202}$$

Pro vzájemnou korelační funkci platí

$$Ruy(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)\int_{0}^{\infty} y(t+\tau)\,dt \tag{203}$$

Dosazením za *y (t+τ)* obdržíme

$$Ruy(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)\int_{0}^{\infty} g(\mu)\cdot u(t+\tau-\eta)d\eta dt \tag{204}$$

Záměnou pořadí integrace a limitováním dostaneme

$$Ruy(\tau) = \int_0^{\infty} g(\eta)\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t)u(t+\tau-\eta)dt\right]d\eta \qquad (205)$$

Výraz v závorce je autokorelační funkce vstupního signálu s argumentem τ -μ

$$Ruu(\tau - \mu\ )$$

pak

$$Ruy(\tau) = \int_0^{\infty} g(\eta)Ruu(\tau-\eta)d\eta \qquad (206)$$

Posledně uvedený výraz je Wiener– Hopfova rovnice v časové oblasti udávající souvislost mezi autokorelační funkcí, vzájemnou korelační funkcí a váhovou funkcí soustavy. Této rovnici se rovněž říká identifikační rovnice a v dalším ji budeme užívat pro identifikaci soustav metodou korelační analýzy.

Obrazový tvar Wiener-Hopfovy rovnice je pak možno napsat v následujícím tvaru:

$$Suy(j\omega) = F(j\omega)\cdot Suu(\omega) \qquad (207)$$

Kde $F(j\omega)$ je kmitočtový přenos soustavy,

$Suu(\omega)$ spektrální výkonová hustota,

$Suy(j\omega)$ vzájemná spektrální hustota.

Σ Shrnutí pojmů

Realizace stacionárního a ergodického náhodného procesu lineární soustavou, Wiener-Hopfova rovnice

? Otázky

1. Popište průchod realizace stacionárního a ergodického náhodného procesu lineární soustavou.
2. Co vyjadřuje Wiener-Hopfova rovnice.

6. PŘEHLED STOCHASTICKÝCH METOD

6.1. Formulace stochastických modelů.

Čas ke studiu: 3 hodiny

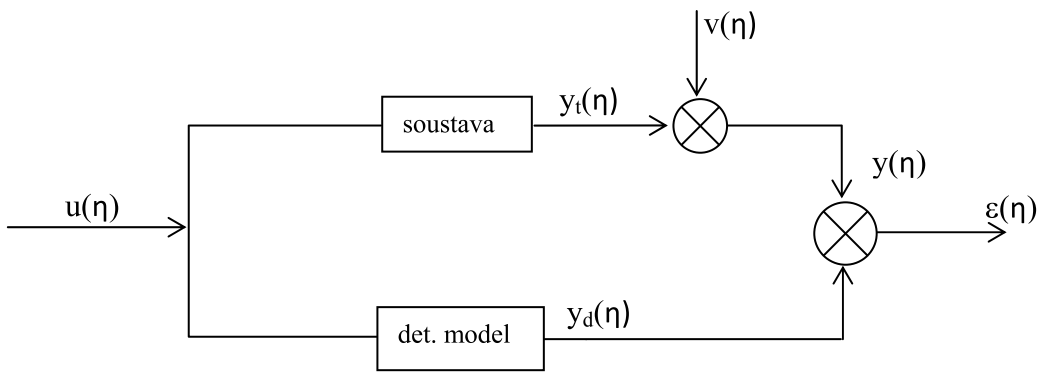
Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat modely soustav vycházející z formulace chyby výstupu a z formulace chyby rovnice.

Výklad

Model soustavy, vycházející z formulace chyby výstupu

Budeme formulovat stochastický model vyjadřující závislost mezi vstupním zkušebním signálem a výstupním náhodným signálem při respektování chyby *ε*. Formulaci provedeme pro společné označení diskrétního i spojitého času [7].



Obr. 55 Zapojení k identifikaci stochastického modelu

$u(\eta)$... naměřená vstupní veličina

$y_t(\eta)$.. teoretický průběh

$y(\eta)$... skutečně naměřený průběh

$y_d(\eta)$... výstup deterministické části modelu

η má význam času (spojitého t, nebo diskrétního k)

$y(\eta)$ v sobě zahrnuje aditivní šumový signál $v(\eta)$ s nulovou střední hodnotou $M[v(\eta)]=0$

Platí:
$$y_t(\eta) = f[u(\eta), q_i] \tag{208}$$

kde q_i jsou koeficienty jejichž odhad je předmětem identifikace.

Kdyby se neuplatňoval aditivní šum, platilo by:

$$y(\eta) = y_t(\eta) = f(u(\eta), q_i) \tag{209}$$

Soustavu by bylo možné popsat deterministickým modelem

$$y_d(\eta) = f(u(\eta), q_i) \tag{210}$$

Ve skutečnosti platí:

$$y(\eta) = f[u(\eta), q_i] + v(\eta) \tag{211}$$

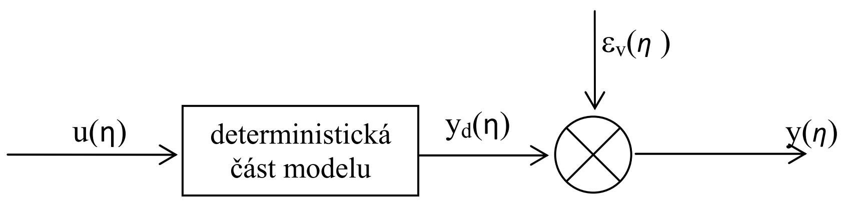
pak je přirozené formulovat stochastický model rovnicí

$$y(\eta) = f[u(\eta), q_i] + \varepsilon_v(\eta) \tag{212}$$

kde $\varepsilon_v(\eta) = v(\eta)$ je tzv. chyba výstupu pro kterou platí: $M[\varepsilon_v(\eta)] = 0$

a pro střední hodnotu naměřených hodnot platí: $M[y(\eta)] = y_d(\eta) = f[u(\eta), q_i]$.

Stochastický model se pak dá znázornit:



Obr. 56 Znázornění stochastického modelu

Předmětem identifikace je odhad q_i.

Podle způsobu vyjádření závislosti mezi vstupním a výstupním signálem deterministické části stochastického modelu hovoříme o modelech.

1) Ve tvaru impulsní charakteristiky (používá se při identifikaci korelační analýzou)

$$\varepsilon_v(t) = y(t) - \int_0^\infty g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda \tag{213}$$

kde $y_d(t) = \int_0^\infty g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda$

Předmětem identifikace je určení pořadnic impulsní charakteristiky. V diskrétním tvaru lze psát:

$$\varepsilon_v(k) = y(k) - \sum_{i=0}^{M} g(i)\cdot u(k-i) \tag{214}$$

$$y_d(k) = \sum_{i=0}^{M} g(i)\cdot u(k-i) \tag{215}$$

2) Ve tvaru přenosu – Laplaceova obrazu (užíváme při identifikaci adaptivními modely)

$$E_v(p) = Y(p) - \frac{M(p,\beta_i)}{N(p,\alpha_i)}U(p) \tag{216}$$

$$Y_d(p) = \frac{M(p,\beta_i)}{N(p,\alpha_i)}U(p) \tag{217}$$

Předmětem identifikace je odhad tvaru přenosu a koeficientů α_i, β_i .

3) Ve tvaru diferenční rovnice (užívá se při identifikaci metodami regresní analýzy – metodou nejmenších čtverců MNČ, zobecněnou metodou nejmenších čtverců ZMNČ, metodou maximální věrohodnosti.

$$\varepsilon_v(k) = y(k) - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}x(k) \tag{218}$$

$$y_d(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}x(k) \tag{219}$$

Předmětem identifikace je odhad řádu diferenční rovnice a koeficientů a_i, b_i.

Mezi modely rozlišujeme:

a) modely lineárními resp. nelineárními v proměnných u a y

b) modely lineárními resp. nelineárními závislosti v parametrech q_i, čímž rozumíme lineární resp. nelineární závislosti mezi proměnou ε a parametry q_i.

Prvý způsob třídění modelů soustavy vyplývá z teorie automatické regulace, kde toto třídění je podstatné z hlediska syntézy obvodů.

Druhé dělení z hlediska linearity i nelinearity v parametrech vyplývá ze zvyklosti matematické statistiky při odhadu parametrů metodou regresní analýzy.

U modelů lineárních v parametrech je chyba výstupu εv lineární funkcí parametrů q_i, takže k jejich odhadu lze užít metod lineární regrese. Nelze-li linearity dosáhnout je třeba užít některé z iteračních metod výpočtu.

Odhad koeficientů vycházející z chyby výstupu $\varepsilon_v(k)$, která má charakter nekorelovaného šumu je odhadem nestranným, t.j. $M[q_i]=q_i$.

Model soustavy vycházející z formulace chyby rovnice

Výhoda nestrannosti odhadu parametrů modelu vycházející z chyby výstupu je zastíněná skutečností, že model je nelineární v parametrech (viz. diferenční rovnici modelu). To by vedlo na řešení nelineárních algebraických rovnic. Proto násobíme diferenční rovnici polynomem $A(z^{-1})$.

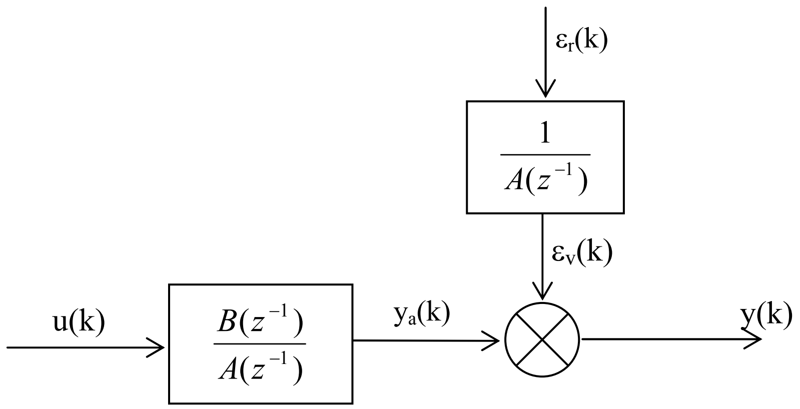
$$\varepsilon_r(k) = \varepsilon_v(k) \,.\, A\,(z^{-1}) \qquad (219)$$

$$\varepsilon_r(k) = A\,(z^{-1})\, y(k) - B(z^{-1})x(k) \qquad (220)$$

Tento model je lineární v parametrech. Chyba rovnice $\varepsilon_r(k)$ je výstupem z filtru $A(z^{-1})$ a i v případě, že $\varepsilon_v(k)$ je chybou nekorelovanou, je $\varepsilon_r(k)$ chybou korelovanou.

(Např. v případě $A(z^{-1}) = 1 + az^{-1}$ je $\varepsilon_r(k) = \varepsilon_v(k) + a\varepsilon_v(k-1)$)

Náhodná čísla posloupností $\varepsilon_r(k)$ jsou korelována koeficientem a. Existence korelované chyby se projeví v jednostranném odhadu parametrů modelu. To je cena, kterou platíme za použití lineární regrese k odhadu parametrů. Bloková schéma modelu je na obr 57.



Obr. 57 Stochastický model s chybou rovnice

Shrnutí pojmů

Model soustavy vycházející z formulace chyby výstupu, model soustavy vycházející z formulace chyby rovnice.

Otázky

1. Charakterizujte model soustavy vycházející z formulace chyby výstupu
2. Charakterizujte model soustavy vycházející z formulace chyby rovnice.

6.2. Metody pro odhad parametrů

Čas ke studiu: 2 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- definovat princip základních metod pro odhady parametrů.

Výklad

K odhadu parametrů soustavy či pořadnic impulsní charakteristiky užijeme metod statistických odhadů, nejčastěji metod regresní analýzy, majících vesměs společný základ spočívající v tom, že má být minimalizováno kritérium přiléhavosti mezi experimentálně získanou odezvou a výstupem modelu. Tímto kritériem je nejčastěji součet čtverců chyby výstupu nebo chyby rovnice. Odhady q_i jsou odhadovány tak, aby minimalizovaly toto kritérium.

Zde je uvedeno několik základních statistických metod odhadu parametrů na kterých je většina stochastických metod založena. Metody se aplikují pro odhady statických modelů, ale dají se použít i na modely popisující dynamické chování soustavy.

Metoda nejmenších čtverců

Při metodě nejmenších čtverců se odhady parametrů γ_i získávají na základě kritéria minimálního součtu kvadrátů chyby *e(k)*. Chybová funkce *S* nabývá minima, jsou-li parciální derivace podle jednotlivých parametrů rovny 0. Získáme tak soustavu *r* rovnic o *r* neznámých a jejím řešením jsou odhady parametrů γ_i.

Tato metoda využívá vektorově–maticového zápisu, který je přehledný, umožňuje jednoduchý zápis složitých výrazů a usnadňuje programování algoritmů.

Základní algoritmy pro odhad parametrů metodou nejmenších čtverců

Metoda slouží pro jednorázový odhad parametrů použitím celého souboru několika měření, což klade nárok na paměť počítače. Navíc výpočet vyžaduje určení inverzní matice, kdy se může objevit problém s regularitou matice. Tyto numerické potíže motivovaly rozvoj algoritmů, které zabraňují zhroucení i v numericky špatně podmíněných případech a umožňují rekurzivní zpracování dat, např. ortogonální transformace (neboli elementární rotace), Choleskyho faktorizace, LDU faktorizace.

Metoda nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním

Při použití metody nejmenších čtverců je vliv všech párů vstup – výstup na výsledné odhady parametrů stejný. Tato vlastnost je nevýhodná, pokud má identifikovaný systém časově proměnné parametry nebo pokud je nelineární. V těchto případech je výhodnější použít rekurzivní metodu nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním, kde novější data mají na odhady parametrů větší vliv než data starší.

Metoda nejmenších čtverců s exponenciálním zapomínáním může být převedena na čistou rekurzivní metodu nejmenších čtverců volbou $\varphi=1$. Nižší hodnoty φ vedou k rychlejšímu zapomínání starších dat a tím rychlejší reakci algoritmu na změny v identifikované soustavě. Volba koeficientu φ je individuální a závisí na vztahu periody vzorkování a dynamiky identifikovaného systému. Většinou je však vhodné volit koeficient v rozsahu 0.90,0.99. [10]

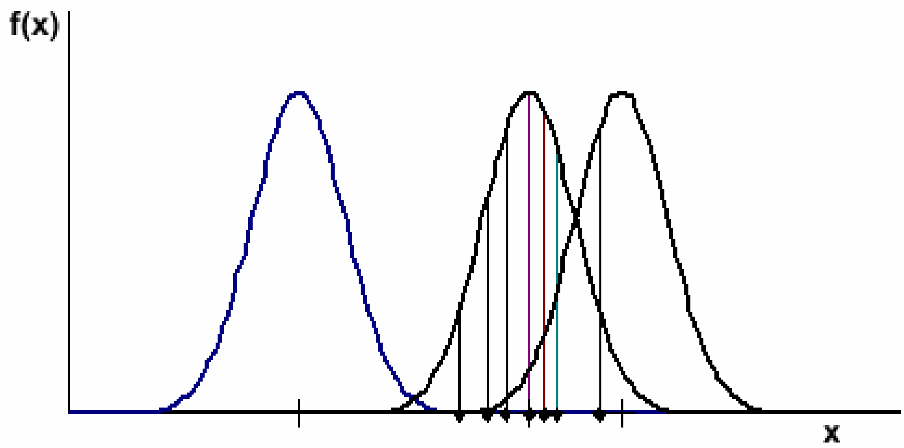
Metoda nejmenších čtverců s adaptivním směrovým zapomínáním

Metoda exponenciálního zapomínání může být dále vylepšena adaptivním směrovým zapomínáním. Při použití této metody je koeficient zapomínání měněn v závislosti na průběhu vstupního a výstupního signálu identifikované soustavy [10].

Metoda maximální věrohodnosti pro odhad parametrů

Metoda maximální věrohodnosti je metoda pro nalezení statistiky (vztahu pro výpočet odhadu), která nejlépe odhaduje hledaný parametr rozdělení základního souboru. Postup přiblížíme příkladem. Máme výběr, tj. několik naměřených hodnot náhodné veličiny (např. 7 hodnot na obr. 58), u které předpokládáme normální rozdělení s neznámým parametrem μ, který odhadujeme. Pro zjednodušení představy předpokládáme, že známe směrodatnou odchylku σ tohoto rozdělení. Umíme tedy vypočítat tvar rozdělení, ale nevíme, kam je umístit na osu hodnot. Pro každou naměřenou hodnotu x_i můžeme vypočítat hustoty pravděpodobnosti $f(x_i)$, pokud dosadíme nějakou předpokládanou hodnotu, kterou by mohl mít hledaný parametr μ (tj. pokud nějak umístíme rozdělení na ose x):

$$f(x_i, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} .$$



obr. 58 Metoda maximální věrohodnosti

Vytvoříme funkci, která se nazývá věrohodnostní (L) a u spojité náhodné proměnné se počítá jako součin hustot pravděpodobností v naměřených bodech při dané zvolené hodnotě μ: $L= f(x_1, \mu)\cdot f(x_2, \mu)\cdot\ldots f(x_n, \mu)$. Jedinou proměnnou v této funkci je hledaný střed rozdělení μ. Měníme-li předpokládanou hodnotu μ, posouváme rozdělení po ose a mění se i hodnota funkce L. Jako maximálně věrohodný odhad μ volíme právě takovou hodnotu, pro niž L dosáhne maxima. Tehdy poloha rozdělení nejlépe odpovídá rozložení naměřených bodů. Posouvání rozdělení podél osy x je znázorněno na obr. 58. Je-li střed rozdělení příliš posunut mimo naměřené body, hodnoty funkce $f(x_i, \mu)$ jsou malé a věrohodnostní funkce L je nízká. Funkce L roste, posouvá-li se střed rozdělení někam mezi naměřené body. Při řešení věrohodnostní funkci L obvykle zlogaritmujeme, čímž opakovaná násobení přejdou na součet logaritmů a pak již maximum této funkce nalezneme na základě diferenciálního počtu (pro maximum je 1. derivace rovna nule, a 2. derivace je záporná). Řešením našeho příkladu bychom zjistili, že maximálně věrohodným odhadem parametru μ je průměr výběru, který je používán jako odhad střední hodnoty dle Čebyševovy věty. (Metoda maximální věrohodnosti ve speciálních případech přechází v metodu nejmenších čtverců.)

Metoda přídavných proměnných

Metoda přídavných proměnných je modifikací metody nejmenších čtverců. Je snadno aplikovatelná a pomáhá zmírnit tvrdé podmínky metody nejmenších čtverců, bez jejichž splnění nelze získat konzistentní odhady [4].

Metoda Monte Carlo

Monte Carlo je třída algoritmů pro simulaci systémů. Jde o stochastické metody používající pseudonáhodná čísla. Typicky využívány pro výpočet integrálů, zejména vícerozměrných, kde běžné metody nejsou efektivní. Metoda Monte Carlo má široké využití od simulací experimentů přes počítání určitých integrálů až třeba řešení diferenciálních rovnic. Základní myšlenka této metody je velice jednoduchá, chceme určit střední hodnotu veličiny, která je výsledkem náhodného děje. Vytvoří se počítačový model toho děje a po proběhnutí dostatečného množství simulací se mohou data zpracovat klasickými statistickými metodami, třeba určit průměr a směrodatnou odchylku.

Rozlišují se dvě varianty metody Monte Carlo: analogový a neanalogový model.

Σ Shrnutí pojmů

Metoda nejmenších čtverců a její variace, metoda maximální věrohodnosti, Monte Carlo

Otázky

1. Vyjmenujte základní metody pro odhad parametrů soustavy.
2. Charakterizujte princip metody nejmenších čtverců.
3. Charakterizujte princip metody maximální věrohodnosti.
4. Charakterizujte princip metody Monte Carlo.

6.3. Metoda nejmenších čtverců

Čas ke studiu: 3 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat metodu nejmenších čtverců,
- stanovit odhad parametrů soustavy s využitím metody nejmenších čtverců.

Výklad

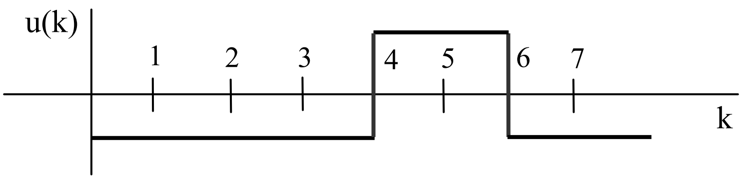
Předpokládejme, že deterministickou část stochastického modelu lze popsat diferenční rovnicí

$$A(z^{-1})y_d(k) = B(z^{-1})\ .\ u(k) \tag{221}$$

rovnice stochastického modelu je

$$\varepsilon_v(k) = y(k) - \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k) \tag{222}$$

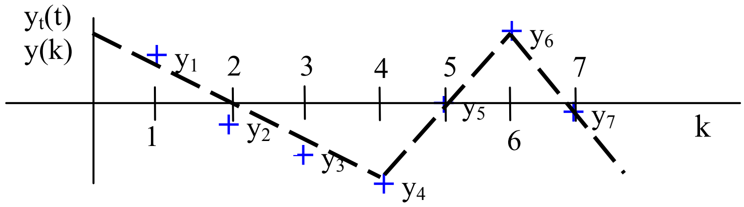
Zvolme tvar pseudonáhodného signálu přiváděného na vstup soustavy dle následujícího obrázku [7].



Naměřené hodnoty jsou $\{u(k)\},\{y(k)\}$

hledané parametry jsou q_i

odhad parametrů je $\hat{q}_i$



Obr 59. Průběhy vstupních a výstupních veličin identifikované soustavy

O diskrétních hodnotách u(k), $y(k)$, $\varepsilon(k)$ lze říci:

$u(k)$ je známou funkcí času

$y(k)$, $\varepsilon_v(k)$ jsou realizace SENP a platí

$$\mu_\varepsilon(k) = 0 \qquad \sigma_{\varepsilon v}^2 = konst.$$

$\varepsilon_v(k)$ je nekorelovaná chyba t.j. $R\varepsilon_v\varepsilon_v(i) = \sigma_{\varepsilon v}^2$ pro $i=0$

0 pro $i \geq 1$

rozložení $\varepsilon_v(k)$ neznáme

Aby deterministický průběh odezvy $y_d(k)$ přiléhal co nejlépe bodům y(k) určíme parametry $\hat{a}_i, \hat{b}_i$ tak aby

$$J_v = \sum_{k=1}^{N-i} \varepsilon_v^2(k) \rightarrow \min \tag{223}$$

Odhady $\hat{q}_i$ bychom vypočetli z podmínkových rovnic

$$\frac{\partial J_v}{\partial \hat{a}_i} = 2\sum_{k=1}^{N-i} \frac{\partial \varepsilon_v(k)}{\partial \hat{a}_i} \varepsilon_v(k) = 0 \tag{224}$$

$$\frac{\partial J_v}{\partial \hat{b}_i} = 2\sum_{k=1}^{N-i} \frac{\partial \varepsilon_v(k)}{\partial \hat{b}_i} \varepsilon_v(k) = 0 \tag{225}$$

Rovnice vyjadřují princip metody nejmenších čtverců. Odhady parametrů získané tímto způsobem budou nestranné t.j. platí $M[\hat{q}_i]=q_i$ ale protože $\varepsilon_v(k)$ je nelineární funkcí parametrů, vede odhad na nelineární regresní analýzu a na řešení soustavy nelineárních algebraických rovnic. Abychom mohli užít metody lineární regresní analýzy vycházíme z rovnic stochastického modelu:

$$\varepsilon_r(k)=A(z^{-1}).y(k) - B(z^{-1}).x(k) \tag{226}$$

kde $\varepsilon_r(k)=A(z^{-1})\varepsilon_v(k)$ $\varepsilon_r(k)$ je chybou rovnice a je korelována

$\mu_\varepsilon(k) = 0 \qquad \sigma_{\varepsilon v}^2 = konst.$

$R_{\varepsilon r \varepsilon r} = \sigma_{\varepsilon r}^2 \qquad pro\ i=0$

různé od nuly pro $i \geq 1$

Aplikujme nyní MNČ:

$$J_v = \sum_{k=1}^{N-i} \varepsilon_v^2(k) \rightarrow \min$$

odhady a_i, b_i určíme z rovnic

$$\frac{\partial J_v}{\partial \hat{a}_i} = 0 \qquad (227)$$

$$\frac{\partial J_v}{\partial b_i} = 0 \qquad (228)$$

Řešíme soustavu rovnic

$$\sum_{k=1}^{N^{\cdot\cdot}-1} y(k-i)\varepsilon_r(k) = 0 \qquad \text{i = 1, 2, ... n} \qquad (229)$$

$$\sum_{k=1}^{N^{\cdot\cdot}-1} u(k-i)\varepsilon_r(k) = 0 \qquad \text{i = 1, 2, ... n} \qquad (230)$$

Rovnice je možno považovat za korelační funkce $Ry\varepsilon_r(i), Ru\varepsilon_r(i)$. Odhady získané z rovnic budou nestranné, jestli funkce za sumačním znakem budou nekorelované. Této podmínce rovnice nevyhovují. Odhady budou jednostranné. Je proto potřebné, aby úroveň užitečného signálu podstatně převýšila úroveň šumového signálu.

Dalším zdokonalením metody je zobecnělá metody nejmenších čtverců, metody maximální věrohodnosti. Cílem je získání nestranných odhadů a užití metod lineární regrese k jejich odhadům.

Řešený příklad

Zadání

Identifikujte soustavu metodou stochastické identifikace při předpokladu, že identifikovaná soustava má charakter proporcionální soustavy 1.řádu a na soustavu jako vstupní signál byl přiváděn Heavisideův jednotkový skok.

Řešení:

Soustava byla změřena pět krát (y1,y2, …, y5) v pravidelných časových intervalech $\Delta t = 0{,}5$.

t	y1	y2	y3	y4	y5
0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.5	0.39	0.51	0.54	0.50	0.67
1.0	1.09	0.88	0.84	0.86	1.05
1.5	1.18	1.16	1.31	1.29	1.46
2.0	1.52	1.36	1.45	1.30	1.58
2.5	1.62	1.58	1.62	1.62	1.64
3.0	1.62	1.61	1.80	1.54	1.86
3.5	1.81	1.82	1.83	1.74	1.83
4.0	1.91	1.74	1.95	1.66	2.00
4.5	1.82	1.85	1.95	1.70	1.98
5.0	1.93	1.82	1.99	1.84	2.07
5.5	1.95	1.91	2.04	1.75	2.14
6.0	1.96	1.86	2.04	1.70	2.11
6.5	2.01	1.80	2.07	1.77	1.91
7.0	1.98	1.88	2.07	1.93	2.13
7.5	1.99	1.95	2.02	1.79	2.03
8.0	1.82	1.89	2.08	1.90	2.14
8.5	1.99	1.93	2.09	1.79	2.04
9.0	2.00	1.89	2.02	1.93	2.14
9.5	2.06	1.95	2.09	1.80	2.05
10.0	2.00	1.90	2.02	1.86	2.15
10.5	1.90	1.96	2.10	1.80	2.08
11.0	2.00	1.90	2.04	1.80	2.15

Z jednotlivých průběhů výstupní veličiny byl statistickým průměrem stanoven reprezentativní průběh výstupní veličiny identifikované soustavy (yp).

T	Yp
0.0	0.00
0.5	0.52
1.0	0.94
1.5	1.28
2.0	1.44
2.5	1.61
3.0	1.69
3.5	1.81
4.0	1.85
4.5	1.86
5.0	1.93
5.5	1.96
6.0	1.93
6.5	1.91
7.0	2.00
7.5	1.95
8.0	1.97
8.5	1.97
9.0	2.00
9.5	1.99
10.0	1.98
10.5	1.97
11.0	1.98

Pro identifikaci byla zvolena metoda nejmenších čtverců s využitím funkce „Řešitel“ v MS Excel. Jako kritérium bylo zvolen součet kvadrátů odchylek modelu identifikované soustavy a reprezentativního průběhu .

$$K = \sum_{\forall t} e^2 \rightarrow \min$$

Identifikovaný prostor byl ohraničen 0,0001 <= k <= 10; 0,0001 <= T <= 10.

Hledané parametry:

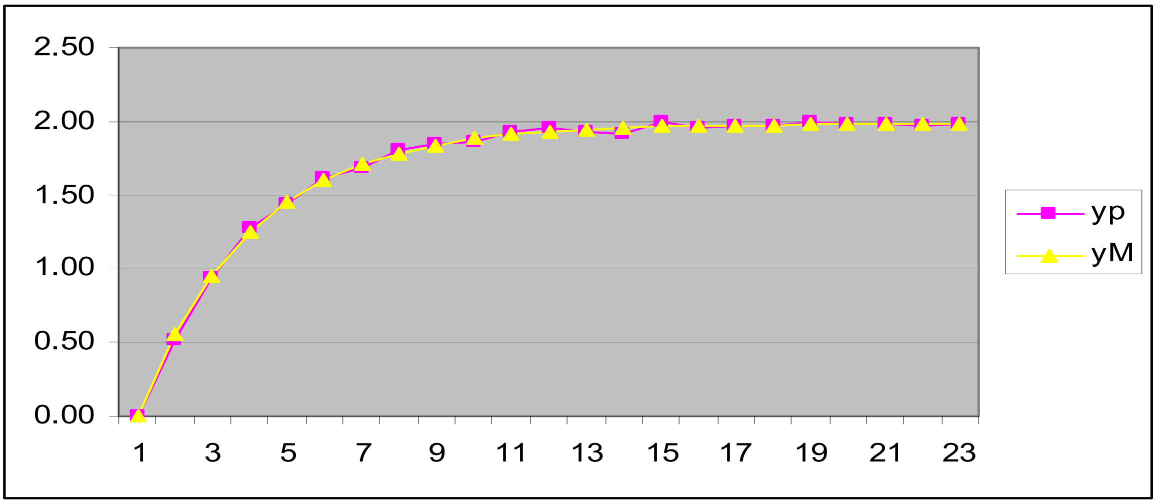
k = 1.9838   T= 1.5206   Kriterium = 0.0097

t	y_p	y_M	Odchylka	odchylka2
0.0	0.00	0.00	0.00	0.0000
0.5	0.52	0.56	-0.04	0.0013
1.0	0.94	0.96	-0.01	0.0002
1.5	1.28	1.24	0.03	0.0011
2.0	1.44	1.45	-0.01	0.0001
2.5	1.61	1.60	0.01	0.0002
3.0	1.69	1.71	-0.02	0.0005
3.5	1.81	1.79	0.02	0.0004
4.0	1.85	1.84	0.01	0.0002
4.5	1.86	1.88	-0.02	0.0005
5.0	1.93	1.91	0.02	0.0004
5.5	1.96	1.93	0.03	0.0007
6.0	1.93	1.95	-0.01	0.0001
6.5	1.91	1.96	-0.04	0.0019
7.0	2.00	1.96	0.03	0.0010
7.5	1.95	1.97	-0.01	0.0002
8.0	1.97	1.97	-0.01	0.0001
8.5	1.97	1.98	-0.01	0.0001
9.0	2.00	1.98	0.02	0.0003
9.5	1.99	1.98	0.01	0.0001
10.0	1.98	1.98	0.00	0.0000
10.5	1.97	1.98	-0.02	0.0002
11.0	1.98	1.98	0.00	0.0000

Identifikovaná soustava při výše uvedených předpokladech má tvar

$$h(t) = 1{,}9838 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{1{,}5206}})$$

Na obrázku je znázorněno srovnání reprezentativních hodnot identifikované soustavy a vypočítané výsledné přechodové charakteristiky jako závislost jejich hodnot na čase.



Obr. 60 Identifikovaná přechodová charakteristika

Shrnutí pojmů

Princip metody nejmenších čtverců, základní vztahy

Otázky

1. Definujte matematický princip metody nejmenších čtverců.

6.4. Metoda korelační analýzy (MKA)

Čas ke studiu: 3 hodiny

Cíl Po prostudování tohoto odstavce budete umět

- popsat princip metody korelační analýzy.

Výklad

Při výkladu o průchodu náhodného signálu lineární soustavou bylo ukázáno, že odhad průběhu impulsní charakteristiky z rovnice [12].

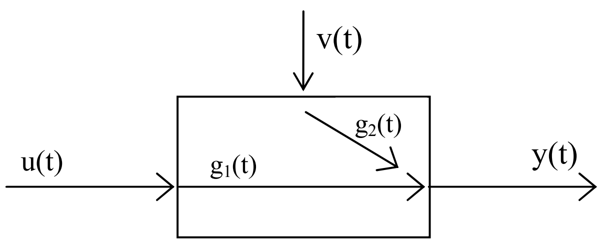
$$\varepsilon_v(t) = y(t) - \int_0^{\infty} g(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda \tag{231}$$

vede na řešení Wiener-Hopfovy (identifikační) rovnice

$$Ruu(\tau) = \int_0^{\infty} g(\lambda)Ruu(\tau-\lambda)d\lambda \tag{232}$$

Z pedagogického i praktického důvodu je vhodné si ukázat, že uplatněním metody korelační analýzy k identifikaci systému je vliv šumové složky vnikající do soustavy zcela potlačen [7].

Předpokládejme, že poruchová veličina *v(t)* vniká do soustavy dle obr 61.



Obr. 61 Působení poruchové veličiny na soustavu

označíme-li $g_1(t)$ impulsní charakteristiku soustavy vzhledem ke vstupní veličině u*(t)* a $g_2(t)$ impulsní charakteristiku vzhledem k realizaci *v(t)* obdržíme:

$$y(t) = \int_0^\infty g_1(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda + \int_0^\infty g_2(\lambda)v(t-\lambda)d\lambda \tag{233}$$

kde $n(t) = \int_0^\infty g_2(\lambda)v(t-\lambda)d\lambda$ je šumový signál, který je superponován na ideální průběh

odezvy $$y_t(t) = \int_0^\infty g_1(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda \tag{234}$$

Pro proměnné soustavy platí

$$y(t)=y_t(t)+n(t) \tag{235}$$

pro model

$$y(t)=y_d(t)+\varepsilon_v(t) \tag{236}$$

Uvažujeme nyní korelační funkci

$$R(uy)(\tau) = Ryu(-\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t)u(t-\tau)dt \tag{237}$$

a dosadíme za *y(t)*

$$R(uy)(\tau) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t-\tau)\int_0^\infty g_1(\lambda)u(t-\lambda)d\lambda dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t-\tau).\int_0^\infty g_2(\lambda)v(t-\lambda)d\lambda dt \tag{238}$$

úpravou získáme:

$$R(uy)(\tau) = \int_0^\infty g_1(\lambda)\left[\ \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t-\tau)u(t-\lambda)dt\ \right]d\lambda + \int_0^\infty g_2(\lambda)$$

$$\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(t-\tau)v(t-\tau)dt\right]d\lambda$$

Výsledkem je:

$$Ruy(\tau) = \int_0^\infty g_1(\lambda)Ruu(\tau-\lambda)d\lambda + \int_0^\infty g_2(\lambda)Ruv(\tau-\lambda)d\lambda \tag{239}$$

Jelikož u*(t)* a *v(t)* jsou nekorelované

je $Ruv(\tau\text{-}\lambda)=0$ a rovnice se zjednoduší

$$Ruy(\tau) = \int_0^\infty g_1(\lambda) Ruu(\tau - \lambda) d\lambda \tag{240}$$

Vyhodnocovacím procesem korelační analýzy je vliv šumové složky zcela potlačen. Problém je ve výpočtu impulsní charakteristiky z Wiener-Hopfovy rovnice.

Při aktivní korelační analýze přivádíme na vstup soustavy PNS. Jeho autokorelační funkce je blízká Diracovu impulsu, což vede na zjednodušení

$$Ruu(\tau) = \delta(\tau)$$

$$Ruy(\tau) = \int_0^\infty g(\lambda) \delta(\tau - \lambda) d\lambda$$

$$Ruy(\tau) = g(\tau)$$

Vzájemná korelační funkce je přímo úměrná impulsní charakteristice soustavy.
Při vlastním řešení se integrál ve Wiener-Hopfově rovnici převádí na sumaci a rovnice se nahrazuje soustavou algebraických rovnic [12].

$$Ruy(\tau) = \sum_{i=1}^{m} g(i\Delta t) Ruu(\tau - i\Delta t) \tag{241}$$

označíme-li $g_i = g(i\Delta t)$ lze pro každé $\tau = \Delta t,\ 2\Delta t ... m\Delta t$ psát systém rovnic.

$$\begin{gathered} g_1 Ruu(0) + g_2 Ruu(\Delta t) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots g_m Ruu[(m-1)\Delta t] = Ruy(\Delta t)) \\ g_1 Ruu(\Delta t) + g_2 Ruu(0) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots g_m Ruu[(m-2)\Delta t] = Ruy(2\Delta t) \\ \vdots \\ g_1 Ruu[(m-1)\Delta t] + v_2 Ruu[(m-2)\Delta t] + \ldots\ldots g_m Ruu(0) = Ruy(m\Delta t) \end{gathered} \tag{242}$$

kde g_i jsou pořadnice hledané impulsní funkce, které získáme řešením uvedeného systému rovnic.

Shrnutí pojmů

Princip metody korelační analýzy, základní vztahy

Otázky

1. Definujte matematický princip metody korelační analýzy.

Další zdroje - LITERATURA:

[1] VROŽINA, M.: *Identifikace systémů*, interní materiály katedry 638, Ostrava: VŠB-TUO, 1986/2005

[2] BOBÁL, V.: *Identifikace systémů*, VUT Brno, 1990

[3] FARANA, R. *Programová podpora simulace dynamických systémů – sbírka řešených příkladů*. 1.vyd. Ostrava: VŠB-TUO, 1996.

[4] NOSKIEVIČ, P.: *Modelování a identifikace systémů.* 1.vyd. Ostrava: MONTANEX, a. s., 1999. 276 s. ISBN 80-7225-030-2.

[5] SOUKUP, J.: *Identifikace soustav.* Praha: SNTL, 1990.

[6] KUNEŠ, J., VAVROCH, O., FRANTA, V.: *Základy modelování*. Praha: SNTL, 1989.

[7] DRÁBEK, O. *Základy stochastického modelování,* VŠCHT Pardubice 1975.

[8] BENEŠ, J. *Statistická dynamika regulačních obvodů*, SNTL Praha, 1961

[9] DRÁBEK, O., MACHÁČEK, J. *Experimentální identifikace*, VŠCHT Pardubice, 1989

[10] VITÁSEK, E. *Numerické metody*, SNTL, Praha, 1987

[11] HAJKR, O. aj. *Teorie statistiky.* Ostrava : VŠB-TUO, 1988

[12] ŠVEC, J. a kolektiv.: *Příručka automatizační a výpočetní techniky*, SNTL, Praha 1975

[13] BALÁTĚ, J.: *Automatické řízení.* 2. přeprac. vyd., ISBN 80-7300-148-9,BEN,Praha: 2004